УДК 535.93

А.И. Маймистов[1], И.А. Пшеничнюк[2], С.С. Косолобов[2], В.П. Драчев[2,3]

[1]Национальный исследовательский ядерный университет – МИФИ, Москва, Россия
[2]Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия
[3]Университет Северного Техаса, Дентон, 76203 Техас, США

ЦЕПОЧКИ СВЯЗАННЫХ МИКРОРЕЗОНАТОРОВ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ОПТИКЕ

Оптические линии, образованные цепочкой связанных кольцевых резонаторов, позволяют направлять электромагнитную волну и менять дисперсионные свойства в широких пределах. Такие структуры в интегральном исполнении и в том числе интегрированные на чипе привлекают все большее внимание. В англоязычной литературе такие структуры называют SCISSOR (от side-coupled integrated spaced sequence of resonators). В данной статье рассмотрены основные элементы цепочек связанных микрорезонаторов, их применение и теоретическое описание.

Ключевые слова: волноводы, ответвитель, кольцевой резонатор, микрорезонатор, фильтр, линии передачи, линейка резонаторов, дисперсионные соотношения, квазигармонические волны.

A.I. Maimistov[1], I.A. Pshenichnyuk[2], S.S. Kosolobov[2], V.P. Drachev[2,3]

[1]National Research Nuclear University, Moscow Engineering Physics Institute, Moscow, Russian Federation
[2]Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russian Federation
[3]University of North Texas, Denton, Texas, USA

COUPLED MICRO-RESONATOR ARRAYS FOR INTEGRATED OPTICS

Optical lines formed by a chain of coupled ring resonators allow directing an electromagnetic wave and varying dispersion properties over a wide range. Such structures in an integrated design, including those integrated on a chip, are attracting more and more attention. In the English literature, such structures are called SCISSOR (from side-coupled integrated spaced sequence of resonators). In this review, we consider the main elements of chains of coupled microcavities, their applications and theoretical description.

Keywords: waveguides, coupler, ring resonator, microcavity, filter, transmission lines, line of resonators, dispersion relations, quasi-harmonic waves.

1. Направляющие структуры в фотонике

Электромагнитное излучение в оптических схемах интегральной оптики обычно распространяется по диэлектрическим волноводам, в которых поле удерживается за счет полного внутреннего отражения [1–3].

Явление брэгговского отражения позволяет реализовать волноводы другого типа, в которых излучение локализуется в области линейного дефекта фотонного кристалла [4–9].

К настоящему времени появились другие направляющие волны структуры, которые сочетают в себе оба отмеченных выше механизма удержания электромагнитной волны в ограниченной области пространства. Простой пример – это цепочка микрорезонторов (рис. 1). Нарушение полного внутреннего отражения приводит к проникновению излучения из одного резонатора в ближайшие соседние резонаторы, а пространственная периодичность порождает дисперсионные свойства такого волновода, которые делают его подобием фотонного кристалла.

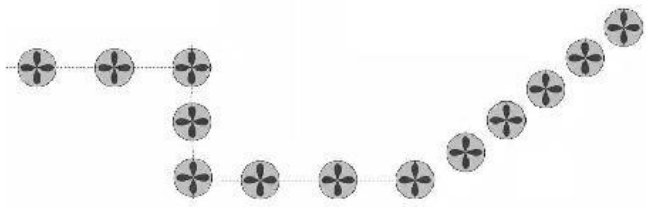
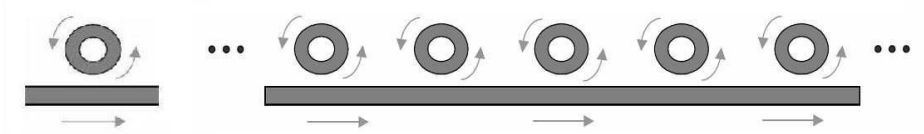


Рис. 1. Цепочка микрорезонаторов, направляющая электромагнитную волну по сложной траектории с резкими поворотами

В интегральной оптике было известно устройство, действующее подобно резонатору Фабри – Перо, представляющее собой кольцевой волновод, связанный с прямолинейным волноводом (рис. 2, *а*). Волновод, вдоль которого расположены связанные с ним кольцевые резонаторы (рис. 2, *б*), действует подобно оптической линии задержки, поскольку скорость распространения в нем волны может существенно отличаться от групповой скорости света в идеальном волноводе. Существенно то, что замедление имеет место для волн с определенной частотой несущей. Такой «нагруженный» волновод может быть использован как селективная линия задержки.



а *б*

Рис. 2. Волновод, «нагруженный» кольцевыми резонаторами:
а – одиночный кольцевой резонатор; *б* – линейка резонаторов

К линейному волноводу можно присоединять не только кольцевые резонаторы, но и любые иные оптические элементы. Это могут быть волоконные петлевые резонаторы, нанорезонаторы в виде металлических или диэлектрических шариков, кольцевые волноводы, допированные резонансными примесями. К волноводу можно присоединить два последовательно соединенных кольцевых резонатора, как показано на рис. 3. Это дает еще один вариант линии задержки.

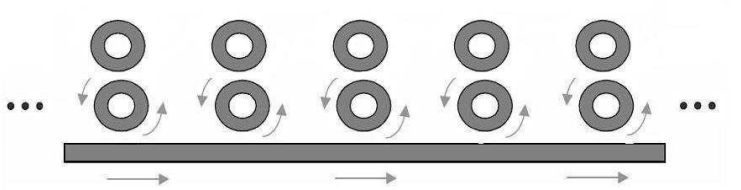
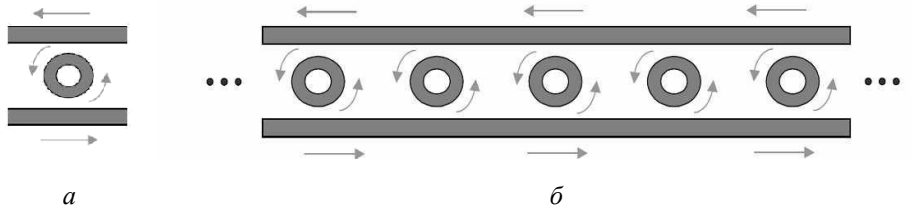


Рис. 3. Волновод, связанный с двойными кольцевыми резонаторами

Кольцевой резонатор, с которым за счет нарушенного полного внутреннего отражения связаны два волновода, образует четырехполюсник, действующий как *антинаправляющий ответвитель* (рис. 4, *а*). Излучение, вошедшее в нижний левый порт, делится на три части таким образом, что некоторая его часть выходит из нижнего и верхнего правых портов, сохраняя направление распространения, и часть излучения выходит из левого верхнего порта в обратном направлении. Пропорции, в которых делится световой поток, зависят от параметров кольцевого резонатора. Существенно то, что кольцевой резонатор играет роль зеркала. Так, если в левый верхний и нижний порты вводить излучение, то частично излучение выйдет из правых портов, а часть его появится в левых портах с обращенным волновым вектором (следует помнить, что роль волнового вектора в волноводах играет постоянная распространения).



а *б*

Рис. 4. Оптическая линия передачи, образованная двумя волноводами:
а – четырехполюсник на основе кольцевого резонатора;
б – линейка четырехполюсников

Последовательное соединение четырехполюсников с кольцевым резонатором приводит к оптической линии передачи, в которой два волновода связаны цепочкой кольцевых резонаторов (рис. 4, *б*).

Если вместо показанного на рис. 4, *а* четырехполюсника использовать четырехполюсник с двумя последовательно связанными кольцевыми резонаторами, то получится ответвитель (или разветвитель, или делитель), сохраняющий направление распространения излучения. Соответствующая оптическая линия передачи, составленная из таких ответвителей, сохраняет направление распространения волны. Она может обладать желаемыми дисперсионными характеристиками, использоваться для замедления электромагнитных импульсов и для контроля их формы.

Управление дисперсионными характеристиками рассмотренных оптических линий передачи обусловлено включением в их конструкцию кольцевых резонаторов [10]. В зарубежной литературе такие линии получили название SCISSOR – *side couple disintegrated spaced sequence of resonators*. Анализ SCISSOR основан на представлении конкретной линии цепочкой элементарных ячеек и определении электрического поля электромагнитной (ЭМ) волны на входах-выходах элементарной ячейки. Распространение волны в оптической линии передачи в этом случае моделируется вычислением матрицы переноса в цепочке элементарных ячеек. Для вычисления матричных элементов матрицы переноса надо определить коэффициенты связи направляющего ответвителя или каплера, с помощью которого связываются линейный волновод и кольцевой резонатор. По этой причине целесообразно рассмотреть аналитически коэффициент связи для каплера с переменным зазором.

2. Роль направляющих ответвителей в фотонике

Направляющие ответвители наряду с решетками ввода, модуляторами и кольцевыми резонаторами являются ключевыми элементами интегральных фотонных схем. Следует отметить, что термин «направленный ответвитель», хотя и граматически менее правильный, также часто используется в литературе вместо термина «направляющий ответвитель». Необходимость разделения оптического сигнала в определенной пропорции возникает в самых разных приложениях фотоники. Взаимодействие между светом, заключенным в волновод, и кольцевыми резонаторами (см. ниже) также происходит посредством принципа, реализуемого в

направленных ответвителях [11]. Разработка кольцевых резонаторов включает оптимизацию коэффициентов связи между кольцами и волноводами, заключающуюся в подборе расстояний и радиусов кривизны. Перед тем как перейти непосредственно к резонаторам, хочется отметить несколько важных примеров использования ответвителей в фотонных схемах.

2.1. Искусственный интеллект

Среди наиболее ярких современных примеров использования направленных ответвителей можно отметить фотонные схемы, реализующие алгоритм машинного обучения. На текущем этапе развития искусственный интеллект реализуется в основном программно. При этом архитектура современных процессоров не оптимизирована под данный класс алгоритмов. Смысл создания искусственных оптических нейронных сетей состоит в том, чтобы реализовать данный алгоритм на уровне фотонного чипа. Концепция продемонстрирована в работе [12] в применении к задаче распознавания речи. Алгоритмически необходимые умножения матриц реализуются при помощи программируемого фотонного процессора. Последний, в свою очередь, состоит исключительно из массива направленных ответвителей и интерферометров Маха – Цандера.

2.2. Модуляторы

Принцип взаимодействия между связанными модами, лежащий в основе функционирования ответвителей и должным образом обобщенный, переносится в такую область, как плазмоника. Теоретическое описание взаимодействия плазмонных и волноводных мод требует определенных теоретических модификаций, и эта задача на данный момент решается только численно. Однако физика направленных ответвителей, перенесенная на взаимодействие плазмонных и волноводных мод, уже используется в многочисленных моделях плазмонных электрооптических модуляторов. Суть эффекта заключается в том, что при соответствующем сближении волновода и плазмонной поверхности происходит периодическая конверсия волноводной моды в плазмон и обратно [13]. Плазмонные моды по своей природе являются гибридными, так как образуются при взаимодействии света с колебаниями электронов. Данный факт применяется на практике для электрической манипуляции такими модами и, в частности, осуществления эффективной электрооптической модуляции [14, 15, 16].

3. Применение кольцевых резонаторов

3.1. Интегрированные лазеры

Спектр применения кольцевых резонаторов в современной интегральной фотонике достаточно широк. Одним из классических примеров является интегрированный полупроводниковый лазер, в котором обычный резонатор Фабри – Перо заменяется кольцевым. В простейших моделях кольцо соединяется с волноводом Y-образным контактом. В самом кольце обустраивается квантовая яма, реализуемая, например, в виде тонкого слоя подходящего материала, обеспечивающая электрическую накачку. Подобные лазеры продемонстрированы экспериментально на ямах AlGaAs–GaAs [17] и InGaAs–GaAs [18]. Внешний радиус кольца в представленных работах варьируется от 11 до 251 мкм, ширина волновода составляет 6–8 мкм. При пороговом токе порядка 100 мА наблюдается эмиссия на фиксированной длине волны в ближнием инфракрасном диапазоне (852 и 1007 нм соответственно). Устройства позволяют возбуждать оптические моды непосредственно на чипе, без необходимости вводить свет через дифракционные решетки.

3.2. Кольцевые модуляторы

Один из способов реализации электрооптической модуляции на чипе предполагает использование кольцевых резонаторов [19]. Яркий пример такого устройства представлен в работе [20]. Устройство состоит из одного кремниевого кольца и волновода, проходящего достаточно близко для осуществления их отической связи. Изначально резонанс в кольце настроен таким образом, чтобы подавлять длину волны 1564 нм. Для осуществления переключения кольцо обкладывается полупроводниками *p*- и *n*-типа. Полученный pin-диод при включении напряжения на обкладках позволяет сдвигать резонанс в кольце. В представленной работе радиус кольца составляет всего 2,5 мкм. Достигнута скорость модуляции порядка 1 Гб/с. Необходимой глубины модуляции удается добиться при весьма незначительном изменении напряжения около 150 мВ на фоне постоянного напряжения смещения порядка 1 В. В данном классе устройств вместо pin-диодов могут использоваться непосредственно переходы *p*-*n*. Некоторые конструкции предусматривают нагреватель для подстройки резонансов [21].

3.3. Фильтры

Наиболее распространено применение кольцевых резонаторов в качестве фильтров. Последние, в свою очередь, могут применяться для оптической обработки сигналов, а также в задачах оптической коммуникации. Фактически кольцевой модулятор, рассмотренный выше, может рассматриваться как активный фильтр. Характеристики фильтров можно улучшать, объединяя кольца в массивы. В работе [22] реализован прототип ультракомпактного фильтра на чипе, состоящего из массива кольцевых резонаторов. Представлены модели, состоящие из трех и пяти колец. Линейный массив колец связывается с двумя волноводами, образуя таким образом 4-терминальное устройство. В массивах колец высокого порядка свет резонансным образом туннелирует через серию связанных резонаторов, если его частота находится внутри полосы пропускания. В противном случае свет практически полностью задерживается. Ширина полосы пропускания в таких устройствах может быть настроена посредством регулирования коэффициентов связи между отдельными кольцами. Заявленная в [22] полоса составляет 310 ГГц. Потери внутри полосы пропускания – порядка 2 дБ, а подавление вне полосы – около 40 дБ. Размер разработанного устройства составляют всего 0,0007 мм^2.

3.4. Мультиплексоры

Важным является применение оптических фильтров в задачах мультиплексирования для уплотнения каналов и повышения пропускной способности линий передачи, а также в задачах демультиплексирования для разделения сигнала по длинам волн. Плотная упаковка в современных применениях накладывает жесткие требования на характеристики используемых фильтров. Массивы кольцевых резонаторов, подобные описанным выше, демонстрируют характеристики, достаточные для коммерческих применений в этой области. Например, в работе [23] продемонстрированы массивы колец до 11-го порядка включительно. Показано, что наращивание порядка позволяет улучшать спектральные характеристики устройства.

3.5. Аналого-цифровые преобразователи

Демультиплексоры являются узлами более сложных фотонных схем. Отдельно стоит отметить их роль в таких устройствах, как фотонные аналого-цифровые преобразователи (АЦП). Как правило, в состав

АЦП входит демультиплексор, разделяющий оптический сигнал по частотам. Практически осуществить разделение можно при помощи массива кольцевых резонаторов, как показано, например, в работе [24] в неинтегральном исполнении. Использовано несколько наборов колец. Каждый набор отвечает за фильтрацию какой-то одной частоты, которая впоследствии регистрируется отдельным фотодетектором. Подбирая радиусы колец и коэффициенты связи в пределах каждого набора, можно добиться необходимого качества частотной характеристики.

3.6. Линии задержки

Еще одной важной областью применения кольцевых резонаторов являются линии задержки. Очевидно, что распространение света невозможно приостановить. Оптический сигнал также невозможно сохранить, не конвертируя его в какие-то другие формы. Линии задержки предназначены для того, чтобы на время замедлить сигнал. Подобный узел может применяться для синхронизации либо буферизации широкополосного оптического потока данных. Принцип задержки с применением резонаторов экспериментально продемонстрирован, например, в работе [25]. Световой импульс, распространяющийся по волноводу, взаимодействует с каскадом колец. Суть принципа состоит в том, чтобы заставить световую волну перестроить свой путь таким образом, чтобы она оказалась запертой в системе резонаторов настолько долго, насколько позволяет добротность. Линии задержки могут быть реализованы в виде достаточно сложных многоступенчатых схем. В работе [26] предложен прототип соответствующего чипа, состоящего из массива кольцевых резонаторов и интерферометров Маха – Цандера. Схема содержит семь блоков задержки с разным количеством колец. Прохождение сигнала управляется 8 интерферометрами, позволяющими регулировать задержку с шагом 10 пс. Чипы обеспечивают максимальную задержку 1,28 нс. Максимальные оптические потери составляют 12,4 дБ. Подобные чипы приближают нас к созданию перестраиваемых оптических анализаторов сигнала [27].

В современной литературе представлено достаточно много прототипов полномасштабных фотонных схем с использованием кольцевых резонаторов [28, 29]. В дополнение к вышеизложенному хотелось бы отметить такие применения, как спектрометр на чипе [30], формирование луча в больших фазированных антенных решетках [31] и другие задачи оптической обработки сигналов [32].

4. Направляющие ответвители

Благодаря явлению полного внутреннего отражения электромагнитные волны удерживаются в диэлектрических волноводах. Благодаря нарушению полного отражения можно вывести излучение из волновода или, напротив, ввести излучение в волновод. Явление нарушения полного внутреннего отражения делает возможным связать между собой волноводы, волновод с призмой в призменном элементе ввода/вывода излучения, волновод с волокном и волоконный волновод с другим волоконным волноводом [2, 3, 33]. Отвлекаясь от конкретных применений этого явления, можно говорить о некотором универсальном элементе (устройстве) интегральной оптики – двухканальном направляющем ответвителе, или о X-разветвителе (рис. 5). На рисунке S_1 и S_2 обозначают потоки энергии в каналах, волновые вектора k_1 и k_2 коллинеарны. Если излучение вводится слева в какой-либо канал, оно появляется справа. Направление передачи энергии не меняется, поэтому показанное на рисунке устройство называют «направляющим ответвителем», или «направленным ответвителем». В настоящей статье используются оба термина вместе с терминами «ответвитель» или «каплер».

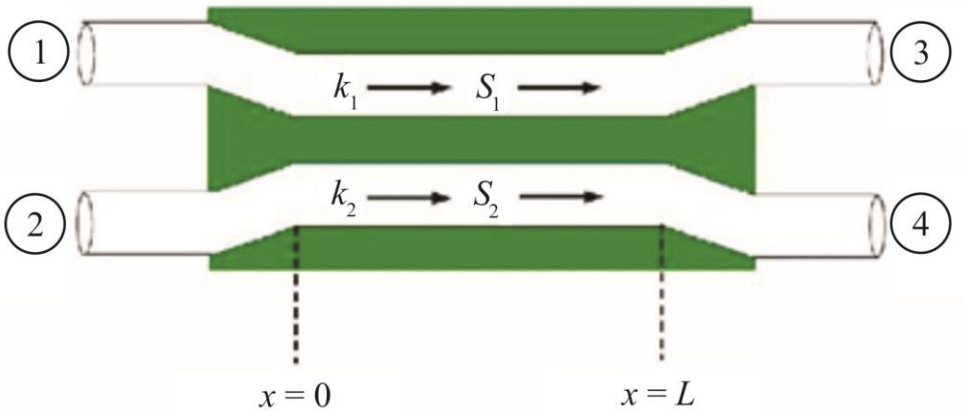


Рис. 5. Схематическое изображение направляющего ответвителя (DirectionalCoupler) [34]

Важной характеристикой каплера является коэффициент связи, с помощью которого определяется перераспределение электрических полей электромагнитной волны между разными каналами каплера.

4.1. Теория связанных волн

Если толщина зазора l между отдельными волноводами-каналами существенно больше, чем расстояние, на котором спадает амплитуда электрического (и магнитного) поля электромагнитной волны, распространяющейся в каждом волноводе, то такая структура представляет собой систему независимых волноводов. Возбужденная в каком-либо канале электромагнитная волна распространяется по этому каналу, оставаясь локализованной в нем. Электрическое поле Фурье-компоненты ТЕ-волны (или ТМ-волны) можно записать как линейную комбинацию ТЕ-мод (или ТМ-волны) обоих каналов:

$$E(x, y, z; \omega) = \sum_{m,\,\mu} E_{\mu m} \Phi_{\mu m}(x, y) \exp(i\beta_{\mu m} z), \qquad (1)$$

где m – номер ТЕ-моды, μ – номер волноводного канала, $\beta_{\mu m}$ – постоянная распространения и $\Phi_{\mu m}(x, y)$ – модовые функции μ-го волновода.

Если постепенно сближать каналы, толщина зазора в конце концов станет такой, что хвосты модовых функций соседних волноводов начнут перекрываться. Возникает ситуация, подобная той, когда излучение может туннелировать через воздушный зазор из одной диэлектрической среды в другую (это явление нарушенного полного внутреннего отражения). Многоканальная система представляет собой систему связанных волноводов, излучение, введенное в какой-нибудь канал, постепенно проникнет во все каналы. Если число каналов равно двум, то такая связанная система представляет собой направляющий ответвитель (см. рис. 5). Предполагая, что поля остаются хорошо локализованными в волноводах, электрическое поле волны задается выражением:

$$E(x, y, z; \omega) = \sum_{m,\,\mu} E_{\mu m} \Phi_{\mu m}(x, y) \exp(i\beta_{\mu m} z), \qquad (2)$$

где в отличие от (1) амплитуды мод $E_{\mu m}$ полагают медленно (в масштабе длины волны) меняющимися вдоль волновода функциями z.

Для описания эволюции вдоль волноводов амплиитуд $E_{\mu m}(z)$ используется теория связанных волн [33–44]. Подробности вывода уравнений для амплитуд $E_{\mu m}(z)$ можно найти в статьях [33, 35, 39] или в учебниках [44, 45].

Надо заметить, что функции $\Phi_{1m}(x, y)$ и $\Phi_{2m'}(x, y)$ сосредоточены на не совпадающих областях плоскости (x, y). Чем дальше отстоят друг от друга волноводы, тем меньше величина перекрытия их модовых функций. Интеграл перекрытия модовых функций из разных волноводов дает естественный малый параметр, по которому можно развить теорию возмущений. Наиболее эффективно связываются моды из различных волноводов, если их постоянные распространения близки: $|\beta_{1m} - \beta_{2m'}| \ll \beta_{1m}$. Если решать волновое уравнение по теории возмущений, то эти моды выступают в роли резонансных членов в ряду теории возмущений. Отбросив все нерезонансные слагаемые, можно получить модель двухуровневой системы. Уравнения для медленно меняющихся амплитуд $E_{1m}(z)$ и $E_{2m}(z)$, отвечающих этим резонансным модам, имеют следующий вид:

$$2i\beta_1 \frac{dE_1}{dz} = -m_{12}E_2 e^{i(\beta_2 - \beta_1)z}, \tag{3}$$

$$2i\beta_2 \frac{dE_2}{dz} = -m_{21}E_1 e^{i(\beta_2 - \beta_1)z}, \tag{4}$$

где модовые индексы опущены и используется матричный элемент:

$$m_{\mu\nu} = (\omega / c)^2 \int \Phi_2(x, y)\Delta\varepsilon(x, y; z)\Phi_1(x, y)dxdy.$$

Здесь интегрирование проводится в плоскости, пересекающей волноводы, $\Delta\varepsilon_\mu$ – разница между диэлектрической проницаемостью μ-го волновода и диэлектрической проницаемостью среды в зазоре между волноводами. В выражении для $\Delta\varepsilon_\mu(x, y; z)$ указана зависимость от продольной переменной z, которая предполагается медленной в масштабе $1/\beta_\mu$. Этим достигается распространение теории связанных волн на случай переменного зазора между волноводами.

Полученные уравнения (3), (4) составляют теоретическую основу анализа направленного ответвителя с любым числом каналов.

4.2. Коэффициенты связи

Для конкретных расчетов необходимо знать или хотя бы уметь оценить величину коэффициента связи между взаимодействующими волнами. Если волноводы изготовлены из одного и того же материала, то

матричный элемент симметричен относительно перестановки индексов $m_{12} = m_{21}$, и с его помощью определяется коэффициент связи волноводов:

$$K_{12} = k_0^2 / 2(\beta_1\beta_2)^{-1/2} \int \Phi_1(x, y)\Delta\varepsilon\Phi_2(x, y)dxdy,$$

где $k_0 = \omega/c$ и $\Delta\varepsilon$ – скачок диэлектрической проницаемости на границе «волновод–зазор».

Если волноводы изготовлены из различных материалов, то $m_{12} \neq m_{21}$, однако можно перенормировать амплитуды связанных мод так, что уравнения (3), (4) запишутся в симметричной форме, и коэффициент связи будет выражаться через m_{12} и m_{21} следующим образом:

$$K_{12}^2 = \frac{m_{12}m_{21}}{\beta_1\beta_2}.$$

Формулы для K_{12} являются общими. Далее будут приведены их конкретные выражения для некоторых волноводных структур. Здесь же, опуская подробности вычислений, приведем только окончательные результаты.

4.2.1. Коэффициенты связи планарных волноводов

Связь ТЕ-мод симметричных близко расположенных планарных волноводов [46] толщиной h, имеющих показатель преломления n_2 и показатель преломления среды зазора (толщиной l) n_3, определяется коэффициентом связи [47]:

$$K = \frac{2q_m^2 p_m \exp(-p_m\delta l)}{\beta h_{ef}(q_m^2 + p_m^2)}, \qquad (5)$$

где $p^2{}_m = fl^2 ¡ k_0{}^2 n^2{}_3$, $q_m{}^2 = k_0{}^2 n^2{}_2 ¡ fl^2$ и $h_{ef} = h + 2 = p_m$ – эффективная толщина волновода. Напомним, что параметры p_m и q_m для данной моды m-го порядка связаны соотношением:

$$hq_m = \pi(m+1) - 2\mathrm{arctg}(q_m / p_m).$$

Связь двух основных мод в полосковых (тождественных) волноводах определяется коэффициентом, совпадающим с (5):

$$K = \frac{2q^2 p \exp(-p\delta l)(\lambda / 2\pi)}{\beta h(n_2^2 - n_3^2)}. \qquad (6)$$

Из приведенных выражений видно, что связь между волноводами ослабевает экспоненциально с ростом ширины зазора δl.

Коэффициенты связи между непланарными волноводами или между волоконными волноводами определяются более сложными формулами.

4.2.2. Коэффициенты связи полосковых волноводов

Коэффициенты связи двух прямоугольных волноводов определены в работе [48]. Для *T M*$_{nm}$-мод коэффициент связи дается выражением:

$$K = \frac{2h_{nm}^2 p_4 \exp(-p_4 d)}{\beta_{nm} W (h_{nm}^2 + p_4)(1 + 1/p_3 W + 1/p_3 W)}. \qquad (7)$$

Для *TE*$_{nm}$-мод

$$K = \frac{2 p_1 h_{nm}^2 p_4 \exp(-p_4 d)}{\beta_{nm} W (h_{nm}^2 + p^2 p_4)} \left[1 + \frac{p_2 (h_{nm}^2 + p_3)}{p_3 W (h_{nm}^2 + p_2^2 p_3^2)} + \frac{p_1 (h_{nm}^2 + p_4)}{p_4 W (h_{nm}^2 + p_1^2 p_4^2)} \right], \qquad (8)$$

где

$$h_{nm}^2 = k_0^2 (n_1^2 - n_{nm}^2), \quad p_3^2 = k_0^2 (n_{nm}^2 - n_3^2), \quad p_4^2 = k_0^2 (n_{nm}^2 - n_4^2),$$

$$p_1 = (n_1 / n_4)^2, \quad p_2 = (n_1 / n_3)^2,$$

n_{nm} – эффективный показатель преломления волновода, $k_0 = \omega / c$, d – толщина зазора, волноводы предполагаются одинаковыми (рис. 6).

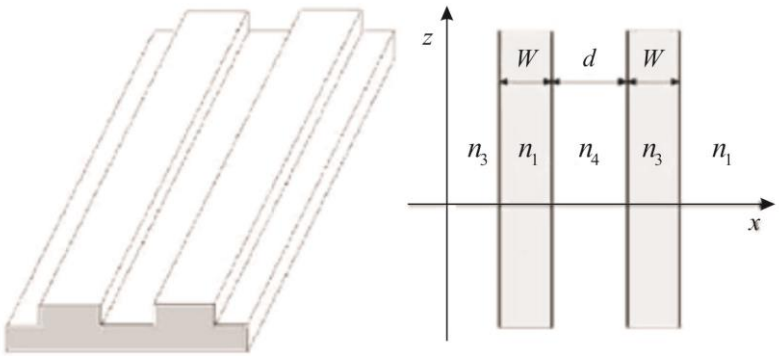


Рис. 6. Схема направляющего ответвителя
на основе полосковых волноводов

4.2.3. Коэффициент связи прямого и кольцевого волновода

Кольцевой резонатор, связанный с линейным волноводом, дает простой пример, когда зазор между волноводами плавно меняется [49, 50].

Из формул (6) или (7) можно сделать вывод, что коэффициент связи волноводов при переменном зазоре между ними можно записать как

$$K = K_0 \exp\left[-p_4 d(x) + p_4 d_0\right], \tag{9}$$

где $d_0 = d(x = 0)$, K_0 – коэффициент связи для случая постоянного зазора.

Рассматривая рис. 7, можно получить выражение для $d(x)$:

$$d(x) = d_0 + R - \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Эта формула приемлема пока $x < R$, поскольку при $x \geq R$ никакой связи волноводов уже нет. Если $x \ll R$, то можно примерно записать выражение для коэффициента связи:

$$K = K_0 \exp\left[-\frac{p_4 x^2}{2R}\right]. \tag{10}$$

На рис. 7 кольцевой волновод характеризуется радиусом кривизны R. Величина зазора на расстоянии x от координаты минимального зазора есть $d(x)$.

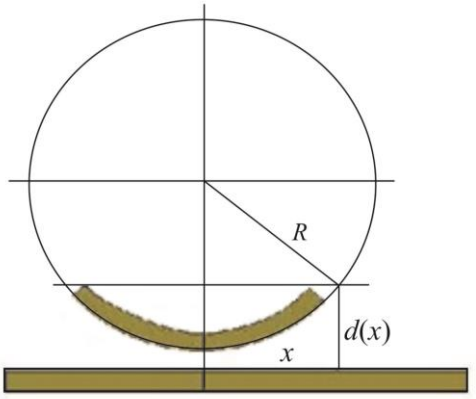


Рис. 7. Схема волноводов (темным цветом помечены волноводы)

Система уравнений для связанных мод имеет вид:

$$\frac{dE_1}{dx} = iK(x)e^{i\Delta\beta x}E_2, \quad \frac{dE_2}{dx} = iK(x)e^{-i\Delta\beta x}E_1, \tag{11}$$

где $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$ – разность постоянных распространения волн в разных волноводах. Если предположить, что выполнено условие синхронизма, $\Delta\beta = 0$, то уравнения (11) можно легко решить, используя новую переменную ζ:

$$\zeta(x) = \int_{-a}^{x} K(x')dx'.$$

Точка a выбрана так, чтобы поля в ней были заданными (известными). В приближении синхронизма решение (11) записывается так:

$$E_1(x) = Ae^{i\zeta} + Be^{-i\zeta}, \quad E_2(x) = Ae^{i\zeta} - Be^{-i\zeta}.$$

Полагая $E_1(-a) = E_{10}$ и $E_2(-a) = E_{20}$ в качестве начальных условий, можно определить константы интегрирования и записать:

$$E_1(x) = E_{10}\cos\zeta(x) + iE_{20}\sin\zeta(x),$$

$$E_2(x) = E_{20}\cos\zeta(x) + iE_{10}\sin\zeta(x).$$

Эти выражения позволяют записать поля на выходах 4-полюсника (рис. 8), положив точку выхода $x = a$:

$$E_3 \equiv E_1(a) = E_{10}\cos\zeta(a) + iE_{20}\sin\zeta(a), \tag{12}$$

$$E_4 \equiv E_2(a) = E_{20}\cos\zeta(a) + iE_{10}\sin\zeta(a). \tag{13}$$

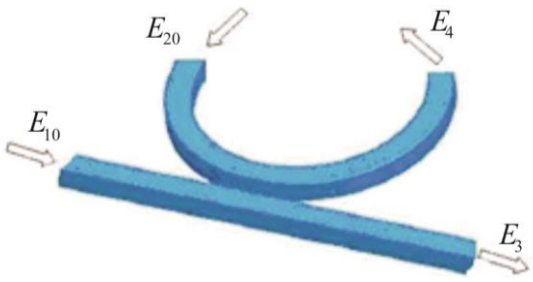


Рис. 8. Схема каплера с кольцевым волноводом
и распределение полей на входах
и выходах 4-полюсника

Определив коэффициенты матрицы переноса как

$$r = \cos\zeta(a);\ \ t = \sin\zeta(a),$$

можно записать уравнения (12), (13) как

$$\begin{pmatrix} E_3 \\ E_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{it} \\ it_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{10} \\ E_{20} \end{pmatrix}.$$

Для параметра $\zeta(a)$ можно записать:

$$\zeta(a) = 2K_0 \int_0^a \left[-p_4 R(1 - \sqrt{1 - x^2 / R^2}) \right] dx.$$

Если $p_4 R \gg 1,$ то можно оценить этот интеграл, заменив аргумент экспоненты его минимальным значением:

$$f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2 / R^2} \approx x^2 / 2R^2,$$

следовательно, показатель экспоненты есть $p^4x^2/2R$. И выражение для $\zeta(a)$ можно записать как

$$\zeta(a) = 2K_0 \sqrt{\frac{2R}{p_4}} \int_0^Y \exp(-y^2) dy, \quad Y = a\sqrt{\frac{p_4}{2R}}.$$

Тут интеграл вероятности возник:

$$\int_0^Y \exp(-y^2) dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}} Erf(Y).$$

Максимум для параметра a есть R. В этом случае $Y = Y_m = \sqrt{p_4 R / 2}$. Параметр p_4 порядка обратной длины волны в среде зазора. Если R есть большая величина по сравнению с длиной волны, то интеграл вероятности можно заменить его максимальным значением, так что

$$\max \zeta(a) = 2K_0 \sqrt{\frac{\pi R}{p_4}}.$$

4.3. Нелинейные направляющие ответвители

Локализация электромагнитной волны в малой области пространства приводит к увеличению напряженности электрического поля до такой степени, что может вызвать существенное изменение показателя преломления в области, занимаемой полем. В результате диэлектрическая проницаемость материала (диэлектриков, полупроводников и металлов) становится зависящей от напряженности электрического поля. Большинство диэлектриков, используемых для изготовления волноводов, характеризуется нелинейной восприимчивостью третьего порядка [51]. Направляющий ответвитель, в котором используются волноводы из кубически нелинейных диэлектриков, описывается системой уравнений теории связанных волн [52, 53, 54, 55, 56]:

$$2i\beta_1 \frac{dE_1}{dz} = -m_{12}E_2 e^{i(\beta_2-\beta_1)z} - \chi_1 \left|E_1\right|^2 E_1, \qquad (14)$$

$$2i\beta_2 \frac{dE_2}{dz} = -m_{21}E_1 e^{i(\beta_2-\beta_1)z} - \chi_2 \left|E_2\right|^2 E_2, \qquad (15)$$

где χ_1, χ_2 – коэффициенты, учитывающие кубическую нелинейность волноводов ответвителя.

Нелинейный направляющий ответвитель обычно используется в качестве переключателя, который управляется оптическим способом. Если на его вход подается слабый сигнал, ответвитель работает как обычный линейный элемент (ответвитель или разветвитель). Но существует пороговое значение мощности излучения, которое действует как запирающее: слабый сигнал, поданный в какой-либо канал ответвителя одновременно с мощным управляющим сигналом, не переходит в другой канал ответвителя.

Недавно был теоретически исследован нелинейный ответвитель, у которого один волновод изготовлен из положительно преломляющего диэлектрика, а другой – из отрицательно преломляющего метаматериала. Такой ответвитель меняет направление распространения волны, действуя как зеркало. В спектре линейных волн, которые распространяются в таком антинаправляющем ответвителе, имеется щель, или запрещенная зона – полоса частот гармонических волн, не распространяющихся через

ответвитель. Волны, частоты которых лежат вне щели, проходят через ответвитель, как в обычном случае направляющего ответвителя. Если один из волноводов ответвителя изготовлен из нелинейного материала, то в достаточно высоком электрическом поле излучения в нем несущая частота выйдет за пределы щели (запрещенной зоны). Если на вход нелинейного антинаправляющего ответвителя поступает импульс электромагнитного поля, то он отразится, если его амплитуда меньше порогового значения, или пройдет через ответвитель, если его амплитуда превысит порог [57, 58, 59]. Помимо образования указанного импульса, распространяющегося через нелинейный антинаправляющий ответвитель, численными методами была изучена модуляционная неустойчивость непрерывного излучения [60, 61, 62]. В [63] представлен обзор явлений, ожидаемых в нелинейном антинаправляющем ответвителе.

5. Одномерный массив четырехполюсников

5.1. Линейка четырехполюсников. Дисперсионное соотношение общего вида

Здесь рассматривается цепочка четырехполюсников. Простейший такой четырехполюсник – это направляющий (направленный) ответвитель, в котором два волновода связаны друг с другим за счет нарушенного полного внутреннего отражения (см. рис. 5). Четырехполюсники могут быть соединены последовательно, когда входные каналы n-го четырехполюсника являются выходными каналами (n–1)-го четырехполюсника, как показано на рис. 9. Такая цепочка напоминает лестницу, у которой перекладины – сами четырехполюсники.

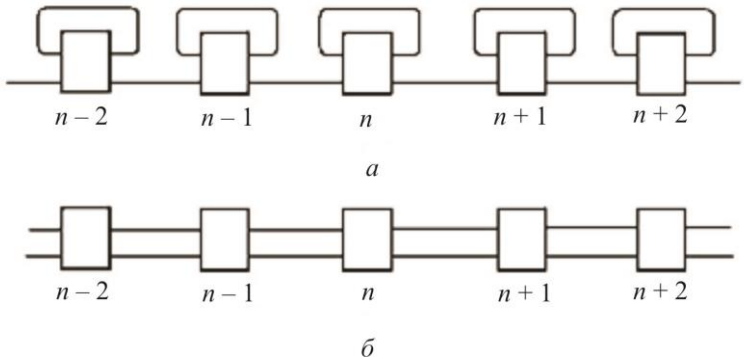


Рис. 9. Цепочка четырехполюсников типа ожерелья (*а*) и типа лестницы (*б*)

В другом случае верхние каналы четырехполюсника можно замкнуть друг на друга и соединять четырехполюсник с соседними, используя нижние каналы. Это модель последовательно соединенных кольцевых резонаторов [50, 64, 65, 66]. Она напоминает ожерелье, в котором бусинами являются кольцевые резонаторы (см. рис. 9). Сам резонатор может иметь произвольно сложную конструкцию, например, последовательность кольцевых волноводов или волоконных петлевых резонаторов, или нанорезонаторов.

Дисперсионное соотношение (зависимость постоянной распространения волны вдоль периодической цепочки от частоты) можно найти, опираясь на теорему Блоха и используя понятие матрицы переноса [10]. Для цепочки четырехполюсников матрица переноса

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

связывает поля на соседних четырехполюсниках, в данном случае:

$$\begin{pmatrix} E_1^{(n+1)} \\ E_2^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^{(n)} \\ E_2^{(n)} \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Утверждение теоремы Блоха[1]:

$$\begin{pmatrix} E_1^{(n+1)} \\ E_2^{(n+1)} \end{pmatrix} = \exp(ik_{ch}L) \begin{pmatrix} E_1^{(n)} \\ E_2^{(n)} \end{pmatrix},$$

где L – расстояние между четырехполюсниками соседних элементарных ячеек, $k_{ch} = k_{ch}(\omega)$ – постоянная распространения («волновое число») электромагнитной волны в цепочке. Подстановка этого выражения в (16) приведет к однородной системе линейных уравнений, нетривиальное (ненулевое) решение которой возможно при выполнении условия:

$$\det \begin{pmatrix} M_{11} - \exp(ik_{ch}L) & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - \exp(ik_{ch}L) \end{pmatrix} = 0.$$

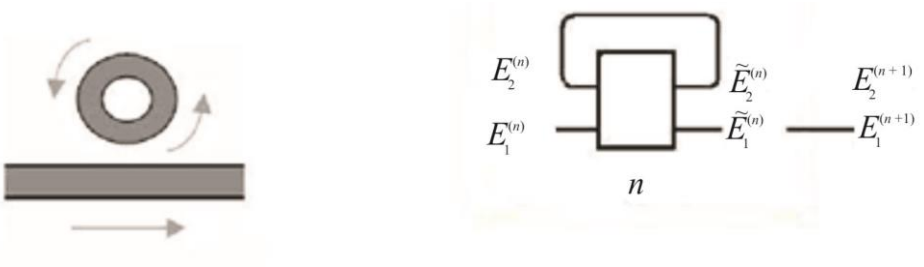
[1] Теорема Блоха в данном случае основана на предположении о циклических граничных условиях. Для конечной цепочки, более того – для цепочки из небольшого числа ячеек, эта теорема не выполняется.

Отсюда следует дисперсионное уравнение для волн, распространяющихся в цепочке четырехполюсников:

$$e^{ik_{ch}L} = \frac{1}{2}\left(M_{11} + M_{22}\right) \pm \frac{1}{2}\left[\left(M_{11} + M_{22}\right)^2 + 4M_{12}M_{21}\right]^{1/2}. \qquad (17)$$

5.2. Цепочка типа ожерелье

Для вычисления матричных элементов матрицы переноса надо рассмотреть элементарную ячейку цепочки и определить поля на входах-выходах ячейки. Для случая последовательности колечек (цепочка типа ожерелье) это сделать проще всего.



а *б*

Рис. 10. Элементарная ячейка цепочки четырехполюсников типа ожерелье: *а* – четырехполюсник с кольцевым резонатором; *б* – схематическое распределение полей на входах/выходах четырехполюсника

Из рис. 10 следует:

$$\tilde{E}_1^{(n)} = rE_1^{(n)} + ite_2^{(n)}, \quad \tilde{E}_2^{(n)} = rE_2^{(n)} + itE_1^{(n)}. \qquad (18)$$

Поскольку на выходе из четырехполюсника излучение из верхнего выхода поступает на верхний вход, что приводит только к набегу фазы, можно записать:

$$E_2^{(n)} = \tilde{E}_2^{(n)} e^{i\varphi}, \quad \varphi = 2\pi R(\tilde{n}_c \omega / c). \qquad (19)$$

Здесь $\tilde{n}_c$ – эффективный показатель преломления волновода, образующего кольцо (петлю), R – радиус кольца. А если петля не кольцо, то фазу надо пересчитать должным образом.

Уравнения (18) и (19) позволяют найти поля сразу на выходах четырехполюсника:

$$\tilde{E}_2^{(n)} = \frac{it}{1-re^{i\varphi}} E_1^{(n)}, \tag{20}$$

$$\tilde{E}_1^{(n)} = \frac{r-e^{i\varphi}}{1-re^{i\varphi}} E_1^{(n)}. \tag{21}$$

В результате распространения поля от n-й ячейки до (n+1)-й элементарной ячейки цепочки поле набирает фазу $\vartheta = L(\tilde{n}_1\omega/c)$, где $\tilde{n}_1$ – эффективный показатель преломления волновода, образующего соединение между соседними четырехполюсниками. Следовательно,

$$\tilde{E}_2^{(n+1)} = \frac{\left(r-e^{i\varphi}\right)e^{i\varphi}}{1-re^{i\varphi}} E_1^{(n)}. \tag{22}$$

Таким образом, все матричные элементы матрицы переноса определены. И оказалось, что в рассмотренном случае они все равны нулю, кроме M_{11}, для которого справедливо выражение:

$$M_{11} = \frac{\left(r-e^{i\varphi}\right)e^{i\vartheta}}{1-re^{i\varphi}} = -\frac{\left(1-re^{-i\varphi}\right)}{1-re^{i\varphi}} e^{i(\vartheta+\varphi)}. \tag{23}$$

Если диссипативные потери или усиление в элементарной ячейке отсутствуют, то $|M_{11}| = 1$.

5.2.1. Дисперсионное соотношение

Дисперсионное соотношение получается при подстановке (23) в (17) и логарифмирования полученного выражения. Результат такой:

$$k_{ch}L = \vartheta + \arg\left[\frac{r-e^{i\varphi}}{1-re^{i\varphi}}\right]. \tag{24}$$

Эта формула была получена в статье [10].

Здесь $\vartheta = L(\tilde{n}_1\omega/c)$, и фазы $\varphi = 2\pi R(\tilde{n}_2\omega/c)$ зависят от частоты гармонической волны, распространяющейся в цепочке. Результирующая сложная (нелинейная) зависимость $k_{ch} = k_{ch}(\omega)$ отражает дисперсию скоростей (фазовых и групповых). Следовательно, импульс излучения, распространяющийся в такой цепочке, может сильно искажаться

или не искажаться в зависимости от положения частоты несущей волны (если, конечно, речь идет о квазигармонической волне) относительно резонанса в дисперсионной кривой $k_{ch} = k_{ch}(\omega)$.

5.2.2. Матричный элемент для одноканальной цепочки четырехполюсников

Здесь важное замечание надо сделать. Матричный элемент M_{11} (23) можно переписать в следующей форме:

$$M_{11} = \frac{\left(r - e^{i\varphi}\right)e^{i\vartheta}}{1 - re^{i\varphi}} = (-1)\frac{\left(1 - re^{-i\varphi}\right)}{1 - re^{i\varphi}}e^{i(\vartheta+\varphi)}.$$

Из этого выражения видно, что $\left|M_{11}\right| = 1$. Из уравнения

$$e^{ik_{ch}L} = M_{11} = \frac{(r - e^{i\varphi})e^{i\vartheta}}{1 - re^{i\varphi}}$$

следует:

$$ik_{ch}L = \mathrm{In}M_{11} = \mathrm{In}\left|M_{11}\right| + i\arg M_{11} = i\vartheta + i\arg\left[\frac{r - e^{i\varphi}}{1 - re^{i\varphi}}\right].$$

Далее:

$$\frac{r - e^{i\varphi}}{1 - re^{i\varphi}} = (-1)e^{i\varphi}\frac{1 - re^{-i\varphi}}{1 - re^{i\varphi}}.$$

Появившуюся здесь рациональную функцию

$$\frac{1 - re^{-i\varphi}}{1 - re^{i\varphi}},$$

можно записать в таком виде:

$$\frac{1 - re^{-i\varphi}}{1 - re^{i\varphi}} = \frac{1 - r\cos\varphi + ir\sin\varphi}{1 - r\cos\varphi - ir\sin\varphi} = \frac{1 + ir\sin\varphi/(1 - r\cos\varphi)}{1 - ir\sin\varphi/(1 - r\cos\varphi)}.$$

Вводится параметр $\alpha = r\sin\varphi/(1 - r\cos\varphi)$, так что

$$\frac{1 - re^{-i\varphi}}{1 - re^{i\varphi}} = \frac{1 + i\alpha}{1 - i\alpha} = \exp(i\chi).$$

Из этого уравнения можно найти:

$$\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}=\alpha.$$

Следовательно, матричный элемент записывается в следующем виде:

$$M_{11}=\exp\left[i(\varphi+\chi+\vartheta+\pi\right],$$

в котором

$$\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}=\frac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi}.$$

Дисперсионное соотношение имеет вид:

$$k_{ch}L=\vartheta+\varphi+\chi+\pi,$$

где

$$\chi=2\operatorname{arctg}\left(\frac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi}\right)+2\pi m,\quad m=0,1,2,...$$

Целое число m нумерует ветви дисперсионного соотношения. Таким образом, дисперсионное соотношение имеет вид:

$$Lk_{ch}=k_{\omega}L+\varphi+2\operatorname{arctg}\left(\frac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi}\right)+2\pi\left(m+\frac{1}{2}\right),\qquad(25)$$

где k_{ω} – волновое число (постоянная распространения) в волноводе, соединяющем соседние элементарные ячейки, φ – фаза, набираемая в кольцевом резонаторе, $\varphi=\pi Rn_c k_0$.

5.2.3. Анализ дисперсионного соотношения

Удобно перейти к переменной φ. Тогда дисперсионное соотношение записывается как

$$Lk_{ch}(\varphi)=\left(1+\frac{Ln_{\omega}}{\pi Rn_c}\right)\varphi+2\operatorname{arctg}\left(\frac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi}\right)+2\pi\left(m+1/2\right).$$

В этой переменной дисперсионные кривые показаны на рис. 11 для случаев:

$$b = \left(1 + \frac{Ln_{\omega}}{\pi R n_c}\right) = 1,2; \quad r = 0,1; \quad r = 0,8.$$

На рис. 11 тангенс угла наклона линии есть обратная скорость. Следовательно, если двигаться вдоль горизонтальной оси частот, то сперва волна замедляется, потом ускоряется и снова замедляется.

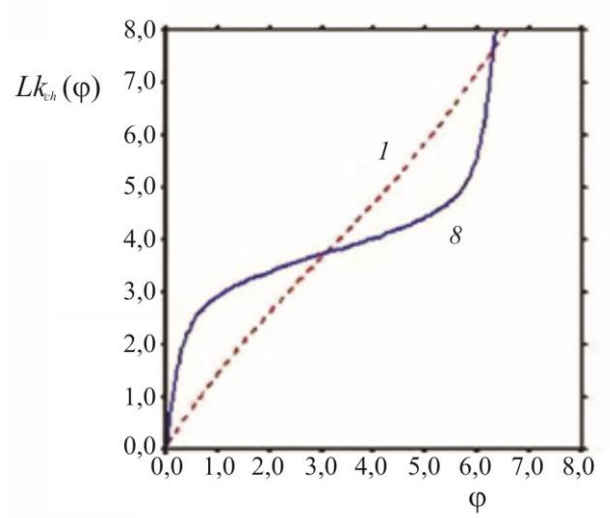


Рис. 11. Дисперсионное соотношение для волны, бегущей в цепочке кольцевых резонаторов, для двух значений коэффициента связи: r = 0; *1* – пунктирная линия и r = 0; *8* – сплошная линия

В случае слабой связи кольцевых резонаторов с волноводом волна распространяется, испытывая очень малую дисперсию скоростей. При сильной связи имеется область частот (поскольку $\varphi = \pi R n_c \omega / c$), в которой возникает заметная дисперсия. В точках $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ присутствие кольцевых резонаторов не проявляется вовсе. Поэтому можно вблизи $\varphi = \pi$ найти приближенное выражение для $Lk_{ch}(\varphi)$ и проанализировать влияние кольцевых резонаторов на характеристики электромагнитной волны.

Пусть $\varphi = \pi - \in$, где $\in \ll 1$. Для величины

$$\mu(\varphi) = \frac{r\sin\varphi}{1 - r\cos\varphi}$$

можно найти приближенное выражение в окрестности $\varphi = \pi$:

$$\mu(\in)=\frac{r\in}{1+r}\left(1-\frac{1}{6}\in^2\right)\left[1+\frac{r}{2(1+r)}\in^2\right]+\vartheta(\in^4)=$$
$$=\frac{r\in}{1+r}\left(1-\frac{1-3r}{6(1+r)}\in^2\right)+\vartheta(\in^4).$$

Поскольку аргумент арктангенса меньше единицы, то можно использовать приближенное выражение:

$$\text{arctg } z\approx z-\frac{1}{3}z^3,$$

что позволяет записать дисперсионное соотношение около точки $\varphi=\pi$ в следующем виде:

$$Lk_{ch}(\varphi)=b(\pi-\in)+\frac{2r\in}{1+r}\left(1-\frac{1-3r}{6(1+\mathrm{r})}\in^2\right)-\frac{r^3\in^3}{3(1+r)^3}+\vartheta(\in^4)+2\pi(m+1/2).$$

Окончательно,

$$Lk_{ch}(\varphi)=b\pi-\left(b-\frac{2r}{1+r}\right)\in-\frac{r(1-2r-3r^2+r^3}{3(1+r)^3}\in^3+\vartheta(\in^4)+2\pi(m+1/2).$$

Групповая скорость определяется как $\nu_g=d\omega/dk$. В рассматриваемом случае можно определить групповую скорость вблизи $\varphi=\pi$ (что отвечает частоте $\omega_\pi=c/(2Rn_c)$):

$$\nu_g^{-1}=\frac{dk_{ch}}{d\omega}\approx\frac{2\pi Rn_c}{c}\frac{dk_{ch}}{d\varphi}=-\frac{2\pi Rn_c}{c}\frac{dk_{ch}}{d\in}=$$
$$=\frac{2\pi Rn_c}{Lc}\left[\left(b-\frac{2r}{1+r}\right)+\frac{r(1-2r-3r^2+r^3}{3(1+r)^3}\in^3\right]. \tag{26}$$

Параметры, которые определяют дисперсию групповых скоростей второго и третьего порядка, можно отсюда получить:

$$\frac{d^2k_{ch}}{d\omega^2}\approx\left(\frac{2\pi Rn_c}{Lc}\right)^2\left[\frac{2r(1-2r-3r^2+r^3}{3(1+r)^3}\in\right], \tag{27}$$

$$\frac{d^3k_{ch}}{d\omega^3}\approx\left(\frac{2\pi Rn_c}{Lc}\right)^3\left[\frac{r(1-2r-3r^2+r^3)}{3(1+r)^3}\right]. \tag{28}$$

В самой точке $\varphi = \pi$ параметр, определяющий дисперсию групповых скоростей второго порядка, равен нулю, так что искажение импульса излучения будет определяться коэффициентом дисперсии третьего порядка.

5.2.4. Матричный элемент для одноканальной цепочки четырехполюсников с перекрученным резонатором

Это не планарный кольцевой резонатор: волна из первого выходного канала поступает на второй входной канал четырехполюсника, пройдя необходимое расстояние по волоконному воловоду, расположенному выше или ниже кольцевого микрорезонатора. Уравнения связанных волн для элементарной ячейки имеют следующий вид:

$$\tilde{E}_1 = rE_1 + itE_2,$$

$$\tilde{E}_2 = rE_2 + itE_1.$$

Перекрученному кольцевому резонатору отвечает следующая связь:

$$E_2 = \tilde{E}_1 e^{i\varphi},$$

где φ – фаза, которая набирается при прохождении волной пути в кольце резонатора, $\varphi = 2\pi R n_c k_0$, n_c – (эффективный) показатель преломления волновода, образующего кольцо. Из первого уравнения связанных волн следует с учетом связи выражение:

$$\tilde{E}_1 = \frac{r}{1 - ite^{i\varphi}} E_1.$$

Подстановка этой формулы в оставшееся уравнение связанных волн дает:

$$\tilde{E}_1 = itE_1 + \frac{r^2}{1 - ite^{i\varphi}} E_1 = \frac{it + e^{i\varphi}}{1 - ite^{i\varphi}} E_1.$$

Учитывая набег фазы на пути между резонаторами, можно записать окончательное соотношение:

$$E_1^{(n+1)} = \frac{it + e^{i\varphi}}{1 - ite^{i\varphi}} e^{i\vartheta} E_1^{(n)},$$

которое определяет единственно ненулевой матричный элемент матрицы переноса.

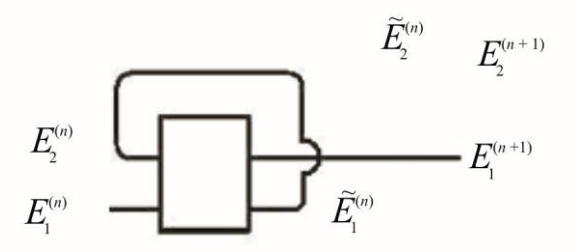


Рис. 12. Схематическое распределение полей на входах/выходах элементарной ячейки цепочки четырехполюсников с перекрученным резонатором

Схематическое распределение полей на входах/выходах элементарной ячейки цепочки четырехполюсников с перекрученным резонатором показано на рис. 12.

5.3. Одноканальная цепочка двухрезонаторных четырехполюсников

Элементарная ячейка одноканальной цепочки резонаторов с двумя петлями резонатора показана схематически на рис. 13. Цепочка таких четырехполюсников действует как линия задержки, обратной волны в ней нет. В силу более сложной элементарной ячейки дисперсия в такой линии задержки будет сложнее, чем в цепочке с одним кольцевым резонатором.

а *б*

Рис. 13. Элементарная ячейка цепочки с двумя кольцевыми резонаторами: *а* – четырехполюсник с кольцевыми резонаторами; *б* – схематическое распределение полей на входах/выходах четырехполюсника

5.3.1. Матрица переноса

Система уравнений связанных волн для этого устройства имеет следующий вид:

$$\tilde{E}_1 = r_1 E_1 + i t_1 A_1, \tag{29}$$

$$B_1 = r_1 A_1 + i t_1 E_1, \tag{30}$$

$$A_2 = r_2 B_2 + i t_2 F_2, \tag{31}$$

$$F_1 = r_2 F_2 + i t_2 B_2. \tag{32}$$

Кольцевые резонаторы влекут следующие связи:

$$A_1 = A_2 e^{i\varphi_1},\ B_2 = B_1 e^{i\varphi_1},\ F_2 = F_1 e^{i\varphi_2},$$

где φ_1 – фаза, которая набирается при прохождении волной половины пути в первом кольце резонатора, $\varphi_1 = \pi R_1 n_{c1} k_0$, φ_2 – фаза, которая набирается при прохождении волной пути во втором кольце резонатора, $\varphi_2 = 2\pi R_2 n_{c2} k_0$, n_{cj} – (эффективный) показатель преломления волновода, образующего *j*-е кольцо (*j* = 1, 2). Учитывается возможное различие параметров каплеров кольца с волноводами-каналами.

Используя связи, можно исключить три амплитуды и переписать уравнения связанных волн в следующей форме:

$$\tilde{E}_1 = r_1 E_1 + i t_1 A_1, \tag{33}$$

$$e^{-i\varphi_1} B_2 = r_1 A_1 + i t_1 E_1, \tag{34}$$

$$e^{-i\varphi_1} A_1 = r_2 B_2 + i t_2 F_2, \tag{35}$$

$$e^{-i\varphi_2} F_2 = r_2 F_2 + i t_2 B_2. \tag{36}$$

Из (36) следует:

$$F_2 = \frac{i t_2}{e^{-i\varphi_2} - r_2} B_2 = \frac{i t_2 e^{i\varphi_2}}{1 - r_2 e^{i\varphi_2}} B_2.$$

Из уравнений (35) после исключения переменной F_2 получается выражение:

$$e^{-i\varphi_1}A_1 = r_2 B_2 - \frac{t_2^2 e^{i\varphi_2}}{1 - r_2 e^{i\varphi_2}} B_2 = \frac{r_2 - e^{i\varphi_2}}{1 - r_2 e^{i\varphi_2}} B_2.$$

Следовательно,

$$A_1 = \frac{r_2 - e^{i\varphi_2}}{1 - r_2 e^{i\varphi_2}} e^{i\varphi_1} B_2 = S_{12} B_2. \qquad (37)$$

Подстановка этого выражения в (36) приводит к выражению:

$$A_1 = \frac{iS_{12} t_1 e^{i\varphi_1}}{1 - r_2 S_{12} e^{i\varphi_1}} E_1. \qquad (38)$$

Подстановка (38) в (33) приводит к выражению амплитуды выходного поля через амплитуду входного поля в четырехполюсник 1 (см. рис. 13):

$$\tilde{E}_1 = \frac{r_1 - iS_{12} e^{i\varphi_1}}{1 - r_2 S_{12} e^{i\varphi_1}} E_1. \qquad (39)$$

При выводе всех формул использовано условие $r_j^2 + t_j^2 = 1$ для $j = 1, 2$.

Таким образом, получено выражение:

$$E_1^{(n+1)} = \frac{r_1 - iS_{12} e^{i\varphi_1}}{1 - r_2 S_{12} e^{i\varphi_1}} e^{i\vartheta} E_1^{(n)},$$

которое определяет единственный ненулевой матричный элемент матрицы переноса ϑ, учитывая набег фазы на пути между соседними тетраподами,

$$M_{11} = \frac{r_1 - iS_{12} e^{i\varphi_1}}{1 - r_2 S_{12} e^{i\varphi_1}} e^{i\vartheta}. \qquad (40)$$

Для проверки справедливости выражения (39) можно поступить несколько иначе. Вместо системы уравнений (34) – (36) использовать альтернативную систему:

$$B_1 = r_1 A_2 e^{i\varphi_1} + it_1 E_1, \qquad (41)$$

$$A_2 = r_2 B_1 e^{i\varphi_1} + it_2 F_1 e^{i\varphi_2}, \tag{42}$$

$$F_1 = r_2 F_1 e^{i\varphi_2} + it_2 B_1 e^{i\varphi_1}. \tag{43}$$

Из (43) можно найти, что

$$F_1 = \frac{it_2 e^{i\varphi_1}}{1 - r_2 e^{i\varphi_2}} B_1.$$

Из (42) с учетом этого выражения следует:

$$A_2 = \frac{r_2 - e^{i\varphi_2}}{1 - r_2 e^{i\varphi_2}} e^{i\varphi_1} B_1.$$

Подстановка A_2 в (41) позволяет найти B_1:

$$B_1 = \frac{it_1}{1 - r_1 S_2 e^{2i\varphi_1}} E_1,$$

где введен параметр[2]

$$S_2 = \frac{r_2 - e^{i\varphi_2}}{1 - r_2 e^{i\varphi_2}}.$$

В (41) входит амплитуда A_1, для которой можно найти следующее выражение:

$$A_1 = e^{i\varphi_1} A_2 = \frac{it_1 S_2 e^{2i\varphi_1}}{1 - r_1 S_2 e^{2i\varphi_1}} E_1.$$

Так что из (41) следует выражение:

$$\tilde{E}_1 = \frac{r_1 - iS_2 e^{2i\varphi_1}}{1 - r_1 S_2 e^{2i\varphi_1}} E_1.$$

Здесь учитывалось соотношение $r_1^2 + t_1^2 = 1$. Поскольку

$$S_{12} = S_2 e^{i\varphi_1},$$

[2] Надо заметить, что $|S_2| = 1$, следовательно, этот множитель добавляет некоторую фазу к φ_1.

выражение для $\tilde{E}_1$ может быть переписано в виде:

$$\tilde{E}_1 = \frac{r_1 - iS_{12}e^{i\varphi_1}}{1 - r_1 S_{12} e^{i\varphi_1}} E_1,$$

что совпадает с (39).

5.3.2. Матричный элемент для одноканального двухрезонаторного двухполюсника

Был найден матричный элемент $M_{11}^{(2)}$ для одноканального двухрезонаторного четырехполюсника:

$$M_{11}^{(2)} = \frac{r_1 - S_{12}e^{i\varphi_1}}{1 - r_1 S_{12} e^{i\varphi_1}} e^{i\vartheta}.$$

Параметр S_{12}, который имеет вид:

$$S_{12} = \frac{r_2 - e^{i\varphi_2}}{1 - r_2 e^{i\varphi_2}} e^{i\varphi_1},$$

можно переписать как

$$S_{12} = \frac{r_1 - e^{i\varphi_2}}{1 - r_2 e^{i\varphi_2}} e^{i\varphi_1} = S_2 e^{i\varphi_1}.$$

Затем новый параметр S_2 переписать в следующем виде:

$$S_2 = (-1)e^{i\varphi_1} \frac{1 - r_2 e^{-i\varphi_2}}{1 - r_2 e^{i\varphi_2}}.$$

Видно, что $|S_2| = 1$. Как в случае однорезонаторного двухполюсника, рациональная функция в этом выражение представляется выражением:

$$\frac{1 - r_2 e^{-i\varphi_2}}{1 - r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{1 + i\alpha_2}{1 + i\alpha_2}, \qquad \alpha_2 = \frac{r_2 \sin\varphi_2}{1 - r_2 \cos\varphi}.$$

С другой стороны,

$$\frac{1 + i\alpha_2}{1 + i\alpha_2} = e^{i\chi_2},$$

где

$$\operatorname{tg}\frac{\chi_2}{2} = \alpha_2.$$

Следовательно,

$$S_2 = (-1)e^{(\varphi_2+\chi_2)}.$$

С учетом этого результата матричный элемент $M_{11}^{(2)}$ можно представить выражением:

$$M_{11}^{(2)} = e^{i\vartheta}\frac{r_1 + e^{i\psi}}{1 + r_1 e^{i\psi}},$$

где $\psi = 2\varphi_1 + \varphi_2 + \chi_2$. Снова, как ранее было сделано, можно переписать выражение для $M_{11}^{(2)}$ следующим образом:

$$e^{-i\vartheta}M_{11}^{(2)} = e^{i\psi}\frac{1 - i\alpha_1}{1 + i\alpha_1},$$

где

$$\frac{1 - i\alpha_1}{1 + i\alpha_1} = e^{-i\chi_1}, \quad \operatorname{tg}\frac{\chi_1}{2} = \alpha_1.$$

Следовательно,

$$M_{11}^{(2)} = e^{(\vartheta+\psi-\chi_1)} = e^{i\Psi(2)}.$$

Дисперсионное соотношение выглядит очень сложно:

$$k_{ch}L = n_\omega k_0 L + \psi - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{r_1 \sin\psi}{1 - r_1\cos\psi}\right) + 2\pi m,$$

где

$$\psi = 2\varphi_1 + \varphi_2 + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{r_2 \sin\varphi_2}{1 - r_2\cos\varphi_2}\right).$$

5.4. Двухканальная цепочка

Элементарная ячейка двухканального кольцевого резонатора с одной петлей показана схематически на рис. 14. Один такой элемент подобен полупрозрачному зеркалу. Цепочка таких ячеек эквивалентна цепочке резонаторов Фабри–Перо, так что двухканальную SCISSOR можно рассматривать как фильтр.

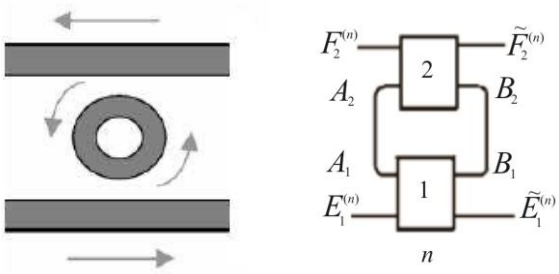


Рис. 14. Элементарная ячейка цепочки четырехполюсников с одним кольцевым резонатором: *а* – четырехполюсник с кольцевым резонатором; *б* – схематическое распределение полей на входах / выходах четырехполюсника

Кольцевой резонатор влечет следующие связи:

$$A_1 = A_2 e^{i\varphi}, \quad B_2 = B_1 e^{i\varphi},$$

где φ – фаза, которая набирается при прохождении волной половины пути в кольце резонатора, $\varphi = \pi R n_c k_0$, n_c – эффективный показатель преломления волновода, образующего кольцо. Учитывается возможность различия параметров каплеров кольца с волноводами-каналами.

Исключая часть полей с помощью связей, можно получить систему уравнений:

$$\tilde{E}_1 = r_1 E_1 + i t_1 A_1, \tag{44}$$

$$B_1 = r_1 A_1 + i t_1 E_1, \tag{45}$$

$$A_2 = r_2 B_2 + i t_2 \tilde{E}_2, \tag{46}$$

$$E_2 = r_2 \tilde{E}_2 + i t_2 B_2. \tag{47}$$

Из уравнений (45) и (46) определяются поля A_2 и B_1:

$$A_2 = \frac{it_2\tilde{E}_2 + it_1r_2e^{i\varphi}E_1}{1-r_1r_2e^{2i\varphi}},$$

$$B_1 = \frac{it_1E_1 + it_2r_1e^{i\varphi}\tilde{E}_2}{1-r_1r_2e^{2i\varphi}}.$$

Подстановка этих выражений в оставшиеся уравнения (44) и (47) и учет равенства $t_{1,2}^2 + t_{1,2}^2 = 1$ приводят к соотношениям между амплитудами полей, входящих и исходящих из каплеров элементарной ячейки:

$$\tilde{E}_1 = \frac{r_1 - r_2e^{2i\varphi}}{1-r_1r_2e^{2i\varphi}}E_1 - \frac{t_1t_2e^{i\varphi}}{1-r_1r_2e^{2i\varphi}}\tilde{E}_2,$$

$$E_2 = \frac{r_2 - r_1e^{2i\varphi}}{1-r_1r_2e^{2i\varphi}}\tilde{E}_2 - \frac{t_1t_2e^{i\varphi}}{1-r_1r_2e^{2i\varphi}}E_1.$$

Пока излучение добралось от *n*-й ячейки до (*n* + 1)-й элеметарной ячейки цепочки, после набрало фазу $\vartheta = L(\tilde{n}_1\omega/c)$, где $\tilde{n}_1$ – эффективный показатель преломления волноводов, образующих соединения между соседними черехполюсниками. Следовательно, надо записать:

$$E_1^{(n+1)} = \tilde{E}_1e^{i\vartheta}, \quad E_1^{(n)} = E_1, \quad E_2^{(n+1)} = \tilde{E}_2e^{i\vartheta}, \quad E_2^{(n)} = E_2.$$

Таким образом,

$$M_{11} = \frac{r_1 - r_2e^{2i\varphi}}{1-r_1r_2e^{2i\varphi}}e^{i\vartheta}, \quad M_{22} = \frac{r_2 - r_1e^{2i\varphi}}{1-r_1r_2e^{2i\varphi}}e^{-i\vartheta},$$

$$M_{12} = M_{21} = -\frac{t_1t_2e^{i\vartheta}}{1-r_1r_2e^{2i\varphi}}.$$

Эти формулы были получены в статье [10].

5.5. Двухканальная цепочка с перекрученной петлей

Элементарня ячейка двухканального кольцевого резонатора с одной петлей показана схематически на рис. 15. На плоскости такое соединение невозможно. Но, если вместе кольцевого резонатора использовать волоконный петлевой резонатор, то создание такого оптического элемента для SCISSOR станет возможным. Система уравнений связанных волн для элементарной ячейки имеет следующий вид:

$$\tilde{E}_1 = r_1 E_1 + i t_1 A_1, \tag{48}$$

$$B_1 = r_1 A_1 + i t_1 E_1, \tag{49}$$

$$\tilde{E}_2 = r_2 E_2 + i t_2 A_2, \tag{50}$$

$$B_2 = r_2 A_2 + i t_2 E_2. \tag{51}$$

Перекрученная петля кольцевого резонатора влечет следующие связи:

$$A_2 = B_1 e^{i\varphi}, \quad A_1 = B_2 e^{i\varphi},$$

где φ – фаза, которая набирается при прохождении волной половины пути в кольце резонатора, $\varphi = \pi R n_c k_0$, n_c – эфективный показатель преломления волновода, образующего кольцо. Учитывается возможность различия параметров каплеров кольца с волноводами-каналами.

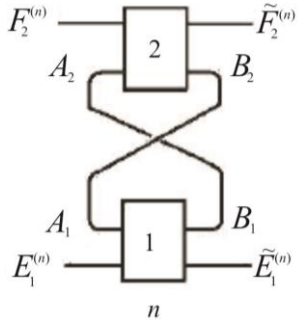


Рис. 15. Элементарная ячейка цепочки четырехполюсников с одним перекрученным кольцевым резонатором

С учётом связей уравнения (49) и (51) можно переписать как пару уравнений относительно амплитуд A_1 и A_2:

$$A_2 e^{-i\varphi} = r_1 A_1 + i t_1 E_1,$$

$$A_1 e^{-i\varphi} = r_2 A_2 + i t_2 E_2.$$

Решение этих уравнений выражается формулами:

$$A_1 = i \frac{t_2 E_2 + t_1 r_2 e^{i\varphi} E_1}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}} e^{i\varphi}, \quad A_2 = i \frac{t_1 E_1 + t_2 r_1 e^{i\varphi} E_2}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}} e^{i\varphi}.$$

Подстановка этих выражений в (48) и (50) приводит к следующим соотношениям между амплитудами входящих и выходящих из данного четырехполюсника полей:

$$\tilde{E}_1 = \frac{r_1 - r_2 e^{2i\varphi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}} E_1 - \frac{t_1 t_2 e^{i\varphi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}} E_2,$$

$$\tilde{E}_2 = \frac{r_2 - r_1 e^{2i\varphi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}} E_2 - \frac{t_1 t_2 e^{i\varphi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}} E_1.$$

При выводе этих соотношений учитывались равенства: $t_{1,2}^2 + t_{1,2}^2 = 1$.

Пока излучение добралось от *n*-й ячейки до (*n* + 1)-й элеметарной ячейки цепочки, а после набрало фазу $\vartheta = L(\tilde{n}_1 \omega / c)$, где $\tilde{n}_1$ – эффективный показатель преломления волноводов, образующих соединения между соседними черехполюсниками. Направление распространения волны не менялось, следовательно, надо записать:

$$E_1^{(n+1)} = \tilde{E}_1 e^{i\vartheta}, \quad E_2^{(n+1)} = \tilde{E}_2 e^{i\vartheta}, \quad E_1^{(n)} = E_1, \quad E_2^{(n)} = E_2.$$

Таким образом,

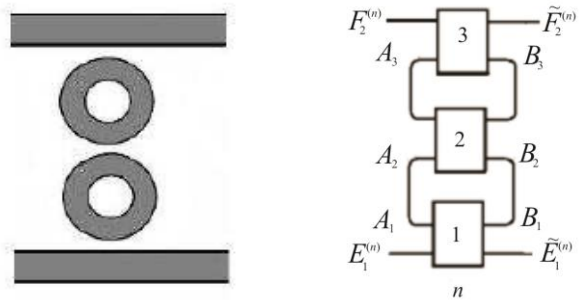
$$M_{11} = \frac{r_1 - r_2 e^{2i\varphi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}} e^{i\vartheta}, \; M_{22} = \frac{r_2 - r_1 e^{2i\varphi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}} e^{-i\vartheta},$$

$$M_{12} = M_{21} = -\frac{t_1 t_2 e^{i\vartheta}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}}.$$

Этот результат совпадает с полученным в статье [10]. Цепочку таких элементарных ячеек можно рассматривать как линию задержки.

5.6. Двухканальная двурезонаторная цепочка

Элементарная ячейка двухканального кольцевого резонатора с одной петлей показана схематически на рис. 16. Элементарная ячейка аналогична направляющему ответвителю: направление распространения волны не меняется.



а *б*

Рис. 16. Элементарная ячейка цепочки четырехполюсников с двумя кольцевыми резонаторами: *а* – четырехполюсник с двумя кольцевыми резонаторами; *б* – схематическое распределение полей на входах/выходах четырехполюсника

Система уравнений связанных волн для элементарной ячейки имеет следующий вид:

$$\tilde{E}_1 = r_1 E_1 + i t_1 A_1, \tag{52}$$

$$B_1 = r_1 A_1 + i t_1 E_1, \tag{53}$$

$$A_2 = r_2 B_2 + i t_2 F_2, \tag{54}$$

$$F_1 = r_2 F_2 + i t_2 B_2, \tag{55}$$

$$\tilde{E}_2 = r_3 E_2 + i t_3 A_3, \tag{56}$$

$$B_3 = r_3 A_3 + i t_3 E_2. \tag{57}$$

Кольцевые резонаторы приводят к следующим связям:

$$A_1 = A_2 e^{i\varphi_1}, \quad B_2 = B_1 e^{i\varphi_1}, \quad A_3 = F_1 e^{i\varphi_2}, \quad F_2 = B_3 e^{i\varphi_2},$$

где φ – фаза, которая набирается при прохождении волной половины пути в кольце резонатора, $\varphi = \pi R n_c k_0$, n_c – эфективный показатель преломления волновода, образующего кольцо j-го резонатора (j = 1,2).

Основными являются уравнения (52) и (56). В оставшихся уравнениях (53) – (55) и (57) надо исключать часть переменных с помощью уравнений связей. Результатом будет система уравнений:

$$e^{-i\varphi_1}B_2 = r_1A_1 + it_1E_1, \tag{58}$$

$$e^{-i\varphi_2}F_2 = r_3A_3 + it_3E_2, \tag{59}$$

$$e^{-i\varphi_1}A_1 = r_2B_2 + it_2F_2, \tag{60}$$

$$e^{-i\varphi_2}A_3 = r_2F_2 + it_2B_2, \tag{61}$$

Из уравнений (60) и (61) можно выразить B_2 и F_2:

$$B_2 = r_2e^{-i\varphi_1}A_1 - it_2e^{-i\varphi_2}A_3,$$

$$F_2 = r_2e^{-i\varphi_2}A_3 - it_2e^{-i\varphi_1}A_1.$$

Уравнения (58) и (59) переписываются как система уравнений:

$$B_2 - r_1e^{-i\varphi_1}A_1 = it_1e^{-i\varphi_1}E_1,$$

$$F_2 - r_3e^{-i\varphi_2}A_3 = it_3e^{-i\varphi_2}E_2.$$

Подстановка в эти уравнения выпажений из предшествующей системы уравнений даёт следующее:

$$\left(r_2e^{-i\varphi_1}A_1 - it_2e^{-i\varphi_2}A_3\right) - r_1e^{-i\varphi_1}A_1 = it_1e^{i\varphi_1}E_1,$$

$$\left(r_2e^{-i\varphi_2}A_3 - it_2e^{-i\varphi_1}A_1\right) - r_3e^{-i\varphi_2}A_3 = it_3e^{i\varphi_2}E_2.$$

Этой системе можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned} S_{11}A_1 + S_{12}A_3 &= it_1E_1, \\ S_{21}A_1 + S_{22}A_3 &= it_3E_2, \end{aligned} \tag{62}$$

где испольщованы матричные элементы матрицы $\hat{S}$:

$$S_{11} = \left(r_2e^{-2i\varphi_1} - r_1\right), \qquad S_{12} = -it_2e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$S_{22} = \left(r_2e^{-2i\varphi_2} - r_3\right), \qquad S_{12} = -it_2e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Замечание. В рассматриваемой системе имеется симметрия «отражения от горизонтальной плоскости, проходящей через середину второго четырехполюсника». Эта горизонтальная симметрия отвечает следующим преобразованиям полей:

$$A_1 \to A_3,\ \ A_2 \to F_1,\ \ B_1 \to B_3,\ \ B_2 \to F_2,\ \ E_1 \to E_2,\ \ \varphi_1 \to \varphi_2,$$

$$A_3 \to A_1,\ \ F_1 \to A_2,\ \ B_3 \to B_1,\ \ F_2 \to B_2,\ \ \tilde{E}_1 \to \tilde{E}_2,\ \ \varphi_2 \to \varphi_1,$$

$$r_1 \to r_3,\ \ r_3 \to r_1,\ \ t_1 \to t_3,\ \ t_3 \to t_1.$$

Преобразования горизонтальной симметрии для матрицы $\hat{S}$ записываются следующим образом:

$$S_{11} \to S_{22},\ \ S_{12} \to S_{21},\ \ S_{21} \to S_{12},\ S_{22} \to S_{11},$$

так что $\Delta = \det \hat{S}$ не меняется при этом преобразовании. Решение системы уравнений (65) дается следующим выражениями:

$$A_1 = \frac{i}{\Delta}\left(t_1 S_{22} E_1 - t_3 S_{12} E_2\right),$$

$$A_3 = \frac{i}{\Delta}\left(t_3 S_{11} E_2 - t_1 S_{21} E_1\right).$$

Подстановка этих выражений в основные уравнения (52) и (56) приводит к следующей системе уравнений:

$$\tilde{E}_1 = \left(r_1 - \frac{t_1^2}{\Delta} S_{22}\right) E_1 + \frac{t_1 t_2}{\Delta} S_{12} E_2,$$

$$\tilde{E}_2 = \left(r_3 - \frac{t_3^2}{\Delta} S_{11}\right) E_2 + \frac{t_1 t_2}{\Delta} S_{21} E_1.$$

Полученные уравнения обладают горизонтальной симметрией, что свижетельствует об их справедливости. Чтобы получить матрицу переноса, надо переписать эти выражения с учетом распространения волны по соединительным волноводам – учесть, но без фазы: $\vartheta : E_j^{(n+1)} = \tilde{E}_j^{(n)} e^{i\vartheta}$, j = 1, 2.

$$E_1^{(n+1)} = \left(r_1 - \frac{t_1^2}{\Delta} S_{22}\right) e^{i\vartheta} E_1^{(n)} + \frac{t_1 t_2}{\Delta} S_{12} e^{i\vartheta} E_2^{(n)},$$

$$E_2^{(n+1)} = \left(r_3 - \frac{t_3^2}{\Delta} S_{11} \right) e^{i\vartheta} E_2^{(n)} + \frac{t_1 t_2}{\Delta} S_{21} e^{i\vartheta} E_1^{(n)}.$$

Таким образом,

$$M_{11} = \left(r_1 - \frac{t_1^2}{\Delta} S_{22} \right) e^{i\vartheta}, \;\; M_{22} = \left(r_3 - \frac{t_3^2}{\Delta} S_{11} \right) e^{i\vartheta},$$

$$M_{12} = \frac{t_1 t_2}{\Delta} S_{12} e^{i\vartheta}, \quad M_{21} = \frac{t_1 t_2}{\Delta} S_{21} e^{i\vartheta},$$

где $\Delta = \det \hat{S}$. Матрица $\hat{S}$ определена выше своими матричными элементами.

6. Распространение квазигармонических волн в цепочках резонаторов

6.1. Квазигармонические волны, волновые пакеты

В приближении линейной оптики для каждой частотной компоненты волнового пакета, который представляет уединенную волну — импульс электромагнитного излучения, можно использовать выражения, полученные для гармонических волн.

Далее будет использоваться комплексное поле $E(x, t)$, которое связано с реальным полем обычным образом: $E^R(x, t) = ReE(x, t)$.

Квазигармоническая волна определена как гармоническая волна с медленно меняющейся амплитудой и фазой. На языке комплексных амплитуд это означает, что

$$E(x, t) = \tilde{E}(x, t) e^{-i\omega_c t + ik_c x}, \tag{63}$$

где ω_c – частота несущей волны, k_c – волновое число волны, которое удовлетворяет дисперсионному соотношению: $k_c(\omega) = \omega$. Если огибающая (амплитуда) волны $\tilde{E}(x, t)$ медленно меняется на масштабах длины волны и периода несущей волны, то говорят, что есть квазигармоническая волна. Но можно отказаться от требования медленности изменения огибающей и рассматривать (63) как аппроксимацию электромагнитного импульса произвольной длительности [71]. В частности, это может

быть всплеск излучения (пульсон, униполярный импульс, импульс в половину периода, видеоимпульс, предельно короткий импульс), когда $\omega_c = 0$ и $k_c = 0$.

Фурье-спектр волны (67) $E(k, \omega)$ и её огибающей $\tilde{E}(k, \omega)$ связаны соотношением:

$$\tilde{E}(k, \omega) = E\left(k_c + k, \omega_c + \omega\right).$$

Для квазигармонической волны справедливо условие, что $E(k, \omega)$ локализован в небольшой окрестности точки $\left(\pm\omega_c, \pm k_c\right)$. Что означает, что поле $\tilde{E}(k, \omega)$ отлично от нуля при $\omega \ll \omega_c, k \ll k_c$, как показано на рис. 17.

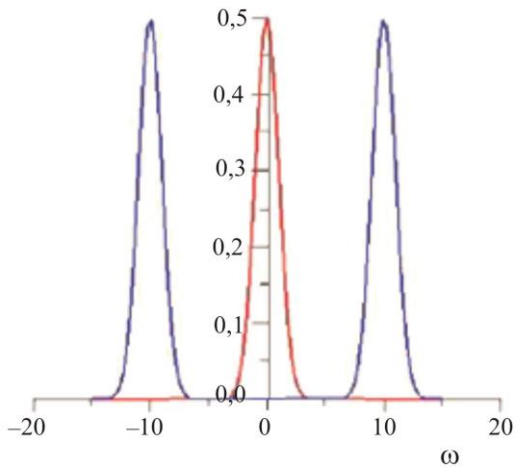


Рис. 17. Спектр квазигармонической волны $E(k, \omega)$ (синяя линия) и её огибающей $\tilde{E}(k, \omega)$ (красная линия)

Распространение электромагнитных импульсов в волноводах, которые образованы цепочками резонаторов, привлекает последнее время значительное внимание [67, 69, 70].

6.2. Уединенная волна в одноканальной цепочке микрорезонаторов

Исходным является соотношение:

$$E^{(n)}(\omega) = M^{(n)}(\omega) E_0(\omega),$$

где $E_0(\omega)$ – фурье-спектр импульса, падающего на вход цепочки из n элементарных ячеек. Для всей цепочки справедливо представление матрицы переноса $M^{(n)}(\omega) = \exp inLk_{ch}(\omega)$, в котором постоянная распространения $k_{ch}(\omega)$ определяется дисперсионным соотношением. Для конкретного случая одноканальной цепочки однорезонаторных ячеек $k_{ch}(\omega)$ определено уравнениями (24) или (25).

Электрическое поле волны на выходе из цепочки есть волновой пакет:

$$E_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E^{(n)}(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{inLk_{ch}(\omega) - i\omega t} E_0(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

В случае квазигармонической волны это выражение можно записать как

$$E_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{inLk_{ch}(\omega) - i\omega t} \tilde{E}_0(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{inLk_{ch}(\omega_c + \omega) - i(\omega_c + \omega)t} \tilde{E}_0(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Поскольку $k_{ch}(\omega_c + \omega) = k_0 + k_0'\omega + \frac{1}{2} k_0''\omega^2$,

где $k_0 = k_{ch}(\omega_c)$, $k_0' = \frac{dk_{ch}}{d\omega}$ и $k_0'' = \frac{d^2 k_{ch}}{d\omega^2}$ вычислены в точке ω_c. В этом приближении

$$E_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(nLk_0 - \omega_c t) + i(nLk_0' - t)\omega + i\left(\frac{nLk_0''}{2}\right)\omega^2} \tilde{E}_0(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} =$$

$$= e^{i(nLk_0 - \omega_c t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(nLk_0' - t)\omega + i\left(\frac{nLk_0''}{2}\right)\omega^2} \tilde{E}_0(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Вычисление интеграла возможно при определенных $\tilde{E}_0(\omega)$. Но если ограничиться линейной аппроксимацией $k_{ch}(\omega)$ вблизи точки ω_c, т.е. полностью пренебречь дисперсией групповых скоростей, то можно записать:

$$E_n(t) = \tilde{E}_0(t - nLk_0') e^{-i(\omega_c t - nLk_0)}.$$

Следовательно, в таком приближении весь волновой пакет движется с групповой скоростью υ_g, а фазовый фронт движется с фазовой скоростью υ_{ph},

$$\upsilon_g^{-1} = k_0' , \qquad \upsilon_{ph}^{-1} = \frac{k_{ch}(\omega_c)}{\omega_c}.$$

В этом же приближении можно вывести величину задержки Δt для импульса, прошедшего расстояние nL в цепочке из n кольцевых резонаторов,

$$\Delta t = \left(\frac{1}{\upsilon_g} - \frac{1}{\upsilon_{ph}} \right) nL = \left(k_0' - \frac{k_{ch}(\omega_c)}{\omega_c} \right) nL. \qquad (64)$$

6.3. Распространение гауссова импульса в одноканальной цепочке микрорезонаторов

В случае, когда огибающая импульса имеет вид гауссиана, возможно вычисление интеграла в выражении $E_n(t)$. Пусть

$$E_0(t) = E_0 \exp\left(-\frac{t^2}{2t_p^2} - i\omega_c t \right).$$

Фурье-спектр этого импульса дается формулой:

$$E_0(\omega) = \sqrt{2\pi} E_0 t_0 \exp\left(-\frac{t_p^2 \Delta\omega^2}{2} \right), \ \Delta\omega = \omega - \omega_c.$$

Таким образом, необходимо оценить интеграл:

$$\frac{E_n(t)}{\sqrt{2\pi} E_0 t_p} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[inLk_{ch}(\omega) - i\omega t - \frac{t_p^2}{2}(\omega - \omega_c)^2 \right] \frac{d\omega}{2\pi}.$$

6.3.1. Учёт дисперсии групповых скоростей второго порядка

Дисперсию групповых скоростей второго порядка можно учесть, если ограничиться квадратичной аппроксимацией:

$$k_{ch}(\omega_c + \omega) = k_0 + k_0'\omega + \frac{1}{2} k_0''\omega^2.$$

Индекс «нуль» означает, что имеющая его величина вычислена в точке $\omega = \omega_c$. В этом случае

$$\frac{\sqrt{2\pi}E_n(t)}{E_0 t_p} = e^{i(nLk_0-\omega_c t)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ia_1 x - a_2 x^2}\,dx,$$

где $x=\omega-\omega_c$, $a_1 = nLk_0' - t$, $a_2 = \frac{1}{2}\left(t_p^2 - inLk_0''\right)$.

Входящий в это выражение интеграл часто встречается и вычисляется стандартным приемом (см. приложение В1). Следовательно,

$$\frac{\sqrt{2\pi}E_n(t)}{E_0 t_p} = e^{i(nLk_0-\omega_c t)}\sqrt{\frac{\pi}{a_2}}\exp\left(-\frac{a_1^2}{4a_2}\right).$$

Если определить дисперсионный параметр D выражением

$$D = \frac{nLk_0''}{t_p^2},$$

то напряженность электрического поля импульса, прошедшего цепочку из n кольцевых резонаторов, можно записать в виде:

$$E_n(t) = E_0\frac{e^{i(nLk_0-\omega_c t)}}{\sqrt{1-iD}}\exp\left[-\frac{(nLk_0'-t)^2}{t_p^2(1+D^2)} + i\frac{D(nLk_0'-t)^2}{t_p^2(1+D^2)}\right]. \qquad (65)$$

Из (65) видно, что с увеличением числа элементарных ячеек и с уменьшением длительности входного импульса ширина (длительность) выходного импульса растет. Это банальный результат. Важнее, что максимум импульса смещается на величину $t_s = nLk_0'$. Следовательно, рассматриваемая линия передачи (одноканальной SCISSOR) является линией задержки.

6.3.2. Учёт дисперсии групповых скоростей третьего порядка

Эффекты дисперсии групповых скоростей третьего порязка (ДГС3) становятся важными с уменьшением длительности испульса. Постоянную распространения возможно необходимо будет аппроксимировать полиномом третьего порядка:

$$k_{ch}(\omega_c+\omega) \approx k_0 + k_0'\omega + \frac{1}{2}k_0''\omega^2 + \frac{1}{6}k_0'''\omega^3.$$

Влияние ДГС3 учитываются коэффициентом k_0''' . В этом случае:

$$\frac{\sqrt{2\pi}E_n(t)}{E_0 t_p} = e^{i(nLk_0-\omega_c t)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ia_1x - a_2x^2 + ia_3x^3}\,dx, \qquad (66)$$

где $a_1 = (nLk_0' - t)$, $a_2 = \frac{1}{2}\left(t_p^2 - inLk_0''\right)$, $a_3 = \frac{1}{6}nLk_0'''$.

Интеграл в (70) выражается через интеграл Эйри первого типа *Ai*(*z*):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ia_1x - a_2x^2 + ia_3x^3}\,dx = \frac{2\pi}{(3a_3)^{1/3}}\exp\left[\frac{a_2}{3a_3}\left(a_1 + \frac{2a_2^2}{9a_3}\right)\right]Ai(u),$$

$$u = -(3a_3)^{\frac{1}{3}}\left(t - nLk_0' - \frac{a_2^2}{3a_3}\right).$$

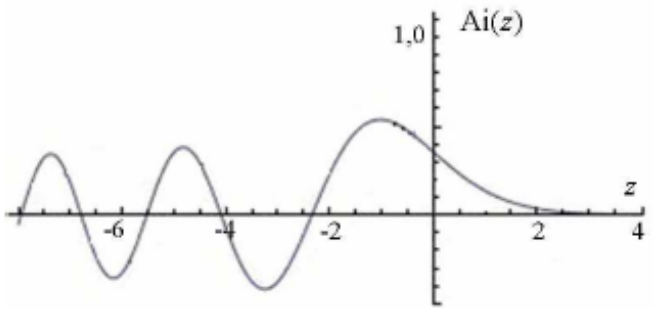


Рис. 18. Вид функции Эйри первого типа

Интеграл Эйри является экспоненциально затухающей функцией с ростом положительных значений аргумента и осциллирующей в области отрицательных значений аргумента (рис. 18).

По аналогии с дисперсионным параметром ***D*** можно определить дисперсионный параметр третьего порядка выражением:

$$D_3 = \frac{nLk_0'''}{2t_p^3}.$$

Таким образом, напряженность электрического поля электромагнитного импульса, прошедшего цепочку из *n* кольцевых резонаторов, можно записать в виде:

$$E_n(t) = \frac{\sqrt{2\pi}E_0}{D_3^{1/3}} \exp\left[i(nLk_0 - \omega_c t) + \frac{1-iD}{2t_p D_3}\left(a_1 + \frac{2(1-iD)^2}{3t_p D_3} \right) \right] Ai(u), \quad (67)$$

где фазовая скорость определена формулой $\upsilon_p = 1/k_0'$ и

$$a_1 = -\left(t - \frac{nL}{\upsilon_p} \right), \quad u = -\frac{1}{t_p D_3}\left(t - \frac{nL}{\upsilon_p} - \frac{(1-iD)^2}{t_p D_3} \right).$$

6.4. Распространение электромагнитного импульса в одноканальной цепочке

Предполагается, что импульс имеет вид квазигармонической волны:

$$E_0(t) = \tilde{E}(t) e^{-i\omega_c t}, \quad (68)$$

Поступившей на выход цепочки резонаторов. Фурье-спектр входного импульса есть $E_0(t) = \tilde{E}_0(\omega - \omega_0)$. Электрическое поле волны на выходе из цепочки есть волновой пакет:

$$E_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{inLk_{ch}(\omega) - i\omega t} \tilde{E}_0(\omega - \omega_0) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Замена переменных $\omega = \omega_c + \Delta\omega$ позволяет записать это выражение как

$$E_n(t) = e^{-i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{inLk_{ch}(\omega_0 + \Delta\omega) - i\Delta\omega t} \tilde{E}_0(\Delta\omega) \frac{d\Delta\omega}{2\pi}.$$

Если принять следующее приближение:

$$k_{ch}(\omega_c + \omega) \approx k_0 + k_0'\omega + \frac{1}{2}k_0''\omega^2 + \frac{1}{6}k_0'''\omega^3,$$

то выражение для электрического поля волны на выходе из цепочки есть волновой пакет:

$$E_n(t) = e^{i(nLk_0 - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ia_1\Delta\omega - a_2\Delta\omega^2 + ia_3\Delta\omega^3} \tilde{E}_0(\Delta\omega) \frac{d\Delta\omega}{2\pi},$$

где $a_1 = (nLk_0' - t)$, $a_2 = \frac{1}{2}\left(t_p^2 - inLk_0''\right)$, $a_3 = \frac{1}{6}nLk_0'''$.

Если ограничиться учётом дисперсии групповых скоростей второго порядка, то поле $E_n(t)$ выражается формулой:

$$E_n(t) = \frac{1}{2\pi} e^{i(nLk_0 - \omega_0 t)} \exp\left(-i\frac{a_1^2}{4a_2^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_0\left(\Delta\omega - \frac{a_1}{2a_2}\right) e^{ia_2\Delta\omega^2}\, d\Delta\omega.$$

Вычисление интеграла возможно, если задана функция $\tilde{E}_0(\omega)$.

6.5. Распространение электромагнитного всплеска в одноканальной цепочке

Это экзотический случай, в котором импульс не имеет несущей волны [71]. Недавно к подобного рода импульсам (униполярным импульсам) возник интерес в связи с ожидаемыми новыми эффектами [72, 73, 74, 75, 76], которые возникают в связи с воздействием на атомы или молекулы среды в течение очень короткого времени (порядка $\sim 10^{-15}$ с) электромагнитного поля постоянной полярности.

Для определенности: пусть огибающая импульса вполовину полного колебания электрического поля электромагнитной волны описывается следующей функцией времени:

$$E_0(t) = E_0 \exp\left(-\frac{t^2}{2t_p^2}\right). \tag{69}$$

Несущая волна отсутствует. Спектр этой волны имеет вид:

$$E_0(\omega) = \sqrt{2\pi} E_0 t_p \exp\left(-\frac{(t_p\omega)^2}{2t_p^2}\right).$$

Напряженность электрического поля волны на выходе из цепочки из *n* задается формулой:

$$E_n(t) = \sqrt{2\pi} E_0 t_p \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[inLk_{ch}(\omega) - i\omega t - \frac{1}{2}t_p^2\omega^2\right]\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Из-за экспоненциальной функции под интегралом основной вклад дадут низкие частоты. Пусть постоянную распространения можно аппроксимировать полиномом третьего порядка:

$$k_{ch}(\omega) \approx k_0 + k_0'\omega + \frac{1}{2}k_0''\omega^2 + \frac{1}{6}k_0'''\omega^3.$$

В таком случае можно записать выходное поле как

$$E_n(t)\frac{E_0 t_p}{\sqrt{2\pi}} e^{inLk_0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ia_1\omega - a_2\omega^2 + ia_3\omega^3} d\omega, \tag{70}$$

где $a_1 = (nLk_0' - t),\ a_2 = \frac{1}{2}(t_p^2 - inLk_0''),\ a_3 = \frac{1}{6}nLk_0'''$.

6.5.1. Учёт дисперсии групповых скоростей второго порядка

Пусть $a_3 = 0$. Интеграл в формуле (70) вычисляется (см. приложение В1). Если ввести коэффициент дисперсии групповых скоростей второго порядка (ДГС2)

$$D = nLk_0''t_p^{-2},$$

то напряженность электрического поля может быть представлена выражением:

$$\begin{aligned} E_n(t) &= \frac{\sqrt{2\pi}E_0}{\sqrt{1-iD}}\exp\left[inLk_0 - \frac{(nLk_0' - t)^2}{2t_p^2(1-iD)}\right] = \\ &= E_0\sqrt{\frac{2\pi}{1-iD}}\exp\left(-\frac{(nLk_0' - t)^2}{2t_p^2(1-iD^2)}\right)\exp\left(inLk_0 + i\frac{(nLk_0' - t)^2 D}{2t_p^2(1-iD^2)}\right). \end{aligned} \tag{71}$$

Этот результат можно было бы получить, как видно, из (65) в пределе $\omega_c \to 0$. Всплеск электромагнитного поля движется как целое с групповой скоростью, уширяется, как положено в результате ДГС2, и преобретает фазу, которая квадратично меняется со временем. Последнее означает, что у волны появляется фазовая модуляция – возникает как бы несущая волна с линейно меняющейся со временем «частотой» (chirp).

6.5.2. Учёт дисперсии групповых скоростей третьего порядка

В этом случае $a_3 \neq 0$. Интеграл в выражении (70) вычисляется (см. приложение В1). Напряженность электрического поля на выходе

цепочки из *n* элеметов задается формулой, совпадающей с выражением (71), но где следует положить ω_c, равное нулю.

Поведение функции Эйри показано на рис. 18. Таким образом, дисперсия групповых скоростей третьего порядка приводит помимо уширения импульса к колебаниям напряженности электрического поля волн, как и следовало бы ожидать [77, 78, 79, 80].

Список литературы

1. Интегральная оптика / под ред. Т. Тамира. – М.: Мир, 1978.

2. Введение в интегральную оптику / под ред. М. Барноски. – М.: Мир, 1977.

3. Ярив А. Введение в оптическую электронику. – М.: Высшая школа, 1983.

4. Chutinan A., Noda S. Highly confined waveguides and waveguide bends in three dimensional photonic crystal // Appl. Phys. Letts. – 1999. – №75, ќ24, – P. 3739–3741.

5. Chutinan A., Noda S. Waveguides and waveguide bends in two dimensional photonic crystal slabs // Phys. Rev. – 2000. – B 62, №7. – P. 4488–4492.

6. Желтиков А.М., Магницкий С.А., Тарасишин А.В. Двумерные фотонные кристаллы с дефектом решетки: спектр дефектных мод, локализация света и формирование нерадиационных волн // ЖЭТФ. 2000117, ќ4. – P. 691–701.

7. Zhang Yao, Li Baojun. Arbitrary angle waveguide bends in two-dimensionalphotonic crystals // Opt.Commun. – 2008. – Vol. 281, no. 17. – P. 4307–4311.

8. Nikolopoulos G.M. Transfer of optical signals around bends in two-dimensional linear photonic networks // arXiv:1411.3536 [quant-ph].

9. Adem Enes Erol, Sami Sozuer H. High transmission through a 90º bend in a polarization-independent single-mode photonic crystal waveguide // Opt.Express. – 2015. – Vol. 23(25). – P. 32690–32695.

10. Distributed andlocalized feedback in microresonator sequences for linear and nonlinear optics / J.E. Heebner, Ph. Chak, S. Pereira, J.E. Sipe, R. W. Boyd // J.Opt.Soc.Amer. – 2004. – B. 21, №10. – P. 1818–1832.

11. Yariv A., Yeh P. Photonics: Optical Electronics // Modern Communications.Oxford University Press. – 2007.

12. Deep learning with coherent nanophotonic circuits / Y. Shen, N.C. Harris, S. Skirlo [et al.] // Nature Photonics. – 2017. – Vol. 11. – P. 441.

13. Ultra-compact silicon nanophotonic modulator with broadband response / V.J. Sorger, N.D. Lanzillotti-Kimura, R. Ma, X. Zhang // Nanophotonics. – 2012. – Vol. 1. – P. 17.

14. Edge-plasmon assisted electro-optical modulator / I.A. Pshenichnyuk, G.I. Nazarikov, S.S. Kosolobov, A.I. Maimistov, V.P. Drachev // Physical ReviewB. – 2019. – Vol. 100. – P. 195434.

15. Pshenichnyuk I.A., Kosolobov S.S., Drachev V.P. Towards Deep Integration of Electronics and Photonics // Applied Sciences. – 2019. – Vol. 9. – P. 4834.

16. Conversion of light polarisation in asymmetric plasmonic waveguides / I.A. Pshenichnyuk, S.S. Kosolobov, A.I. Maimistov, V.P. Drachev // Quantum Electronics. – 2018. – Vol. 48. – P. 1153.

17. Singlefrequency continuous-wave operation of ring resonator diode lasers / J.P. Hohimer, D.C. Craft, G.R. Hadley, G.A. Vawter, M.E. Warren // Applied physics letters. – 1991. – Vol. 59. – 3360.

18. In/sub x/Ga/sub 1-x/As-Al/sub y/Ga/sub 1-y/As-GaAs strained-layer quantum-well heterostructure circular ring lasers / H. Han, M.E. Favaro, D.V. Forbes, J.J. Coleman // IEEE photonics technology letters. – 1992. – Vol. 4. – 817.

19. Ring Resonator Modulators in Silicon for Interchip Photonic Links / G. Li, A.V. Krishnamoorthy, I. Shubin, J. Yao, Y. Luo, H. Thacker, J.E.Cunningham // IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics. – 2013. – Vol. 19. – P. 95.

20. Ultra-low voltage, ultra-small mode volume silicon microring modulator / S. Manipatruni, K. Preston, L. Chen, M. Lipson // Optics express. – 2010. – Vol. 18. – P. 18235.

21. Wavelength-tunable silicon microring modulator / P. Dong, R. Shafiiha, S. Liao, H. Liang, N.N. Feng, D. Feng, M. Asghari // Optics express. – 2010. – Vol. 18. – P. 10941.

22. Ultra-compact high order ring resonator filters using submicron silicon photonic wires for on-chip optical interconnects / F. Xia, M. Rooks, L. Sekaric, Y. Vlasov // Optics express. – 2007. – Vol. 15. – P. 11934.

23. Very high-order microring resonator filters for WDM applications / B.E. Little, S.T. Chu, P.P. Absil, J.V. Hryniewicz, F.G. Johnson, F. Seiferth, M. Trakalo // IEEE Photonics Technology Letters. – 2004. – Vol. 16. – P. 2263.

24. Photonic analog-to-digital conversion with electronic-photonic integratedcircuits / F.X. Kartner, R. Amatya, M. Araghchini, J. Birge,

H. Byun, J. Chen, J.L. Hoyt // Silicon Photonics III. International Society for Optics and Photonics. – 2008.

25. A reconfigurable architecture for continuously variable optical slow-wave delay lines / F. Morichetti, A. Melloni, A. Breda, A. Canciamilla, C. Ferrari, M. Martinelli // Optics Express. – 2007. – Vol. 15. – P. 17273.

26. Continuously tunableultra-thin silicon waveguide optical delay line / X. Wang, L. Zhou, R. Li, J. Xie, L. Lu, K. Wu, J. Chen // Optica. – 2017. – Vol. 4. – P. 507.

27. On-chip optical convolutional neural networks / H. Bagherian, S. Skirlo, Y. Shen, H. Meng, V. Ceperic, M. Soljacic // arXiv preprint arXiv:1808.03303. – 2018.

28. Fully programmable ring-resonator-based integrated photonic circuit for phase coherent applications / A. Agarwal, P. Toliver, R. Menendez, S. Etemad, J. Jackel, J. Young, W. Chen // Journal of lightwave technology. – 2006. – Vol. 24. – P. 77.

29. Hybrid photonic circuit for multiplexed heralded single photons / T. Meany, L.A. Ngah, M.J. Collins, A.S. Clark, R.J. Williams, B.J. Eggleton, S. Tanzilli // Laser and Photonics Reviews. – 2014. – Vol. 8. – P. L42.

30. High resolution on-chip spectroscopy based on miniaturized microdonut resonators / Z. Xia, A.A. Eftekhar, M. Soltani, B. Momeni, Q. Li, M. Chamanzar, A.Adibi // Optics express. – 2011. – Vol. 19. – P. 12356.

31. Novel ring resonator-based integrated photonic beamformerfor broadband phased array receive antennas – Part I: Design and performanceanalysis / A. Meijerink, C.G. Roeloffzen, R. Meijerink, L. Zhuang, D.A. Marpaung, M.J. Bentum, W. van Etten // Journal of Lightwave Technology. – 2009. – Vol. 28. – P. 3.

32. Roadmap on all-optical processing / P. Minzioni, C. Lacava, T. Tanabe, J. Dong, X. Hu, G. Csaba, J. Schroder // Journal of Optics. – 2019. – Vol. 21. – P. 063001.

33. Marcuse D. The Coupling of Degenerate Modes in Two Parallel DielectricWaveguides // Bell. Syst. Tech. J. – 1971. – Vol. 50, no. 6. – P. 1791–1816.

34. Linear and nonlinear metamaterials and transformation optics / N.M. Litchinitser, I.R. Gabitov, A.I. Maimistov, V.M. Shalaev // Tutorials in Metamaterials / eds. M.A. Noginov, V.A. Podolskiy. – RC Press, Taylor & Francis Group, BocaRaton. – London, New York, 2012.

35. Yariv A. Coupled Mode Theory for Guided Wave Optics // IEEEJ. Quant.Elecrton. – 1973. – QE-9, no. 9. – P. 919–933.

36. Tien P.K. Integrated Optics and New Wave Phenomena in Optical Waveguides. // Rev.Mod.Phys. – 1977. – Vol. 49, no. 2. – P. 361–420.

37. Accuracy of directional coupler theory in fiber or integrated optics applications / C. Yeh, F. Manshadi, K.F. Casey, A. Johnston // J.Opt.Soc.Amer. – 1978. – Vol. 68, no. 8. – P. 1079–1083.

38. Tsukada N., Tsujinishi Ryoko, Tomishima Kazunary High-effeciency coupling between phase-mismatched optical waveguides // J. Appl. Phys. – 1979. – Vol. 50, no. 7. – P. 4611–4615.

39. Coupled Mode Theoryof Optical / H.A. Waveguides, W.P. Hous Huang, S. Kawakami, N.A. Whitaker // J. Lightwave Technol. – 1987. – LT-5, no. 1. – P. 16–23.

40. Семенов А.С., Смирнов В.Л., Шмалько А.В. / Элементы волноводного тракта оптических интегральных схем на основе трехмерных оптических волноводов // Квантовая электроника. – 1988. – Т. 15, № 7. – С. 1327–1357.

41. Crosignani B., Porto P.Di, Yariv A. Coupled-Mode Theory and Slowly-Varying Approximation in Guided-Wave Optics // Opt.Commun. – 1990. – Vol. 78, no. 3, 4. – P. 237–239.

42. Wei-Ping Huang Coupled-mode theory for optical waveguides: an overview // J. Opt. Soc. Amer. – 1994. – A. 11, iss. 3. – P. 963–983.

43. Hamiltonian formulation of coupled-mode theory in waveguiding structures / Ph. Chak, Rajiv Iyer, J.S. Aitchison, J.E. Sipe // Phys. Rev. – 2007. – E. 75. – 016608 (14 p.).

44. Ярив А., Юх П. Оптические волны в кристаллах. – М.: Мир, 1987.

45. Ханспердже Р. Интегральная оптика. Теория и технология. – М.: Мир, 1985.

46. Findakly T., Chen C.-L. Optical directional couplers with variable spacing // Appl. Opt. – 1978. – Vol. 17, no. 5. – P. 769–773.

47. Сомех С. Оптические направленные ответвители // Введение в интегральную оптику / под ред. М. Барноски. – М.: Мир, 1977. – С. 194–226.

48. Kuznetsov M. Expressions for the coupling coefficient of a rectangular wave guide directional coupler // Opt.Lett. – 1983. – Vol. 8 (9). – P. 499–501.

49. Embedded ring resonators for microphotonic applications / Lin Zhang, Muping Song, Teng Wu, Lianggang Zou, R.G. Beausoleil, A.E.Willner // OpticsLetters. – 2008. – Vol. 33, no. 17. – P. 1978–1980.

50. Microring Resonator Channel Dropping Filters / B.E. Little, S.T. Chu, H.A. Haus, J. Foresi, J.-P. Laine // J. Lightwave Technol. – 1997. – LT-15, no. 6. – P. 998–10055.

51. Шен И.Р. Принципы нелинейной оптики. – М.: Наука, 1989.

52. Jensen S.M. The Nonlinear Coherent Coupler // IEEE J. Quant. Electron. – 1982. – QE-18, no. 10. – P. 1580–1583.

53. Ankiewicz A. Interaction Coefficient in Detuned Nonlinear Couplers // Opt.Commun. – 1988. – Vol. 66, no. 5, 6. – P. 311–314.

54. Assanto G. All-optical integrated nonlinear devices // J. Mod. Opt. – 1990. – Vol. 37, no. 5. – P. 855–873.

55. Маймистов А.И. О распространении светового импульса в нелинейныхтуннельно связанных оптических волноводах // Квантовая электроника. – 1991. – Т. 18, № 6. – С. 758–761.

56. Yuan L.-P. A Unified Approach for the Coupled-Mode Analysis of Nonlinear Planar Optical Couplers // IEEE J. Quant. Electr. – 1994. – QE-30, no. 1. – P. 126–133.

57. Litchinitser N.M., Gabitov I.R., Maimistov A.I. Optical Bistability in aNonlinear Optical Coupler with a Negative Index Channel // Phys. Rev. – 2007. – Lett.99. – P. 113902.

58. Маймистов А.И., Габитов И.Р., Личиницер Н.М. Уединенные волны внелинейном антинаправленном ответвителе // Оптика и спектроскопия. – 2008. – Т. 104, № 2. – С. 292–297.

59. Рыжов М.С., Маймистов А.И. Формирование щелевого солитона в антинаправленном нелинейном ответвителе // Квантовая электроника. – 2012. – Т. 42, №11. – С. 1034–1038.

60. Modulationinstability in nonlinear oppositely directed coupler with a negative-index metamaterial channel / Yuanjiang Xiang, Shuangchun Wen, Xiaoyu Dai, Dianyuan Fan // Phys. Rev. – 2010. – E. 82. – P. 056605.

61. Modulation instability in a triangular three-core coupler with a negative-index material channel / A.K. Shafeeque Ali, K. Nithyanandan, K. Porsezian, A.I. Maimistov // Journal of Optics. – 2016. – Vol. 18. – P. 035102.

62. Influence of birefringence in the instability spectra of oppositely directed coupler with negative index material channel / A.K. Shafeeque Ali,

K. Nithyanandan, K. Porsezian, A.I. Maimistov // Phys. Rev. – 2016. – A. 93. – P. 023848.

63. Maimistov A.I., Kazantseva E.V. Oppositely Directional Coupler: Example of the Forward Backward Waves Interaction in the Metamaterials // Contemporary Optoelectronics: From (Meta)Materials to Device Applications / ed. by Oleksiy Shulika and Igor Sukhoivnov. Springer Series in Optical Sciences. Springer-Verlag. – 2016. – Vol. 199. – P. 181–195.

64. Filter synthesis forperiodically coupled microring resonators / B.E. Little, Sai T. Chu, J.V. Hryniewicz, Ph. P. Absil // Opt. Lett. – 2000. – Vol. 25, no. 5. – P. 344–346.

65. Synthesis of a parallelcoupled ring-resonator filter / B.E. Little, Sai T. Chu, J.V. Hryniewicz, Ph.P. Absil // Opt. Lett. – 2001. – Vol. 26, no. 12. – P. 917–346.

66. Melloni A. Synthesis of a parallel-coupled ring-resonator filter // Optics Letters. – 2001. – Vol. 26, no. 12. – P. 917–920.

67. Coherent micromirror arrays / Kebin Li, Uma Krishnamoorthy, J.P. Heritage, O. Solgaard // Optics Letters. – 2002. – Vol. 27, no. 5. – P. 366–368.

68. Li Huanan, Kottos Tsampikos, Shapiro B. Driving-induced metamorphosis oftransport in arrays of coupled resonators // Phys. Rev. – 2018. – A 97. – P. 023846.

69. Gorlach M.A., Poddubny A.N. Interaction-induced two-photon edge states inan extended Hubbard model realized in a cavity array // Phys.Rev. – 2017. – A. 95. – P. 033831.

70. Single-photon nonreciprocaltransport in one-dimensional coupled-resonator waveguides / Xun-Wei Xu, Ai-Xi Chen, Yong Li, Yu-xi Liu // Phys.Rev. – 2017. – A. 95. – P. 063808.

71. Шварцбург А.Б. Видеоимпульсы и непериодические волны в диспергирующих средах (точно решаемые модели) // УФН. – 1998. – Т. 168, № 1. – С. 85–103.

72. Розанов Н.Н. Электрическая площадь предельно коротких импульсов имомент силы // Оптика и спектроскопия. – 2018. – Т. 125, № 6. – С. 818–819.

73. Распространение импульса света с длительностью менее одного периода в усиливающей резонансной среде / Р.М. Архипов, М.В. Архипов, И. Бабушкин, А.В. Пахомов, Н.Н. Розанов // Квантовая электроника. – 2018. – Т. 48, № 6. – С. 532–536.

74. Розанов Н.Н., Архипов Р.М., Архипов М.В. О законах сохранения вэлектродинамике сплошных сред (к 100-лет. Гос. оптич. ин-та им. С.И. Вавилова) // УФН. – 2018. – Т. 188, № 12. – С. 1347–1353.

75. Розанов Н.Н. Об ускорении релятивистской частицы импульсом излучения // Оптика и спектроскопия. – 2019. – Т. 126, № 2. – С. 211–213.

76. Розанов Н.Н. Транспортировка предельно коротких импульсов излучения в волноводах с неодносвязным поперечным сечением // Оптика и спектроскопия. – 2019. – Т. 127, № 6. – С. 960–962.

77. Дисперсионное расплывание фемтосекундных световых импульсов в кристаллах, воздухе и воде / А. Бирмонтас, В. Василяускас, А. Пискарскас, А. Стабинис // Квантовая электроника. – 1985. – Т. 12, № 6. – С. 1191–1195.

78. Anderson D.G., Askne J.I.H. Wave packets in strongly dispersive media // Proc. IEEE. – 1974. – Т. 62. – С. 1518–1523; ТИИЭР. – 1974. – Vol. 62, № 11. – С. 121–127.

79. Miyagi M., Nishida Sh. Pulse spreading in a single-mode fiber due to thirdorder dispersion. // Appl.Opt. – 1979. – Vol. 18, no. 5. – С. 678–682.

80. Oughstun K.E. The Group Velocity Approximation // Electromagneticand Optical Pulse Propagation // Springer Series in Optical Sciences. – 2019. – Vol. 225. – Springer, Cham.

References

1. Integral'naia optika [Integrated optics]. Ed. T. Tamira. Moscow: Mir, 1978.

2. Vvedenie v integral'nuiu optiku [Introduction to integrated optics]. Ed. M. Barnoski. Moscow: Mir, 1977.

3. Iariv A. Vvedenie v opticheskuiu elektroniku [Introduction to optical electronics]. Moscow: Vysshaia shkola, 1983.

4. Chutinan A., Noda S. Highly confined waveguides and waveguide bends in three dimensional photonic crystal. *Appl. Phys. Letts.*, 1999, no. 75, ќ24, pp. 3739-3741.

5. Chutinan A., Noda Susumu. Waveguides and waveguide bends in two dimensional photonic crystal slabs. *Phys. Rev.*, 2000, B 62, no. 7, pp. 4488-4492.

6. Zheltikov A.M., Magnitskii S.A., Tarasishin A.V. Dvumernye fotonnye kristally s defektom reshetki: spektr defektnykh mod, lokalizatsiia

sveta i formirovanie neradiatsionnykh voln [Two-dimensional photonic crystals with a lattice defect: spectrum of defect modes, localization of light, and formation of non-radiation waves]. ZhETF. 2000117, ќ4, pp. 691-701.

7. Yao Zhang, Baojun Li. Arbitrary angle waveguide bends in two-dimensionalphotonic crystals. *Opt.Commun.*, 2008, vol. 281, no. 17, pp. 4307-4311.

8. Nikolopoulos G.M. Transfer of optical signals around bends in two-dimensional linear photonic networks. arXiv:1411.3536 [quant-ph].

9. Adem Enes Erol, H. Sami Sozuer. High transmission through a 90º bend in a polarization-independent single-mode photonic crystal waveguide. *Opt. Express*, 2015, vol. 23(25), pp. 32690-32695.

10. Heebner J.E., Chak Ph., Pereira S., Sipe J.E., Boyd R.W. Distributed andlocalized feedback in microresonator sequences for linear and nonlinear optics. *J. Opt. Soc. Amer.*, 2004, B. 21, no. 10, pp. 1818-1832.

11. Yariv A., Yeh P. Photonics: Optical Electronics. *Modern Communications.Oxford University Press*, 2007.

12. Shen Y., Harris N.C., Skirlo S. et al. Deep learning with coherent nanophotonic circuits. *Nature Photonics*, 2017, vol. 11, pp. 441-446.

13. Sorger V.J., Lanzillotti-Kimura N.D., Ma R.-M., Zhang X. Ultra-compact silicon nanophotonic modulator with broadband response. *Nanophotonics*, 2012, vol. 1, pp. 17-22.

14. Pshenichnyuk I.A., Nazarikov G.I., Kosolobov S.S., Maimistov A.I., Drachev V.P. Edge-plasmon assisted electro-optical modulator. *Physical Review B*, 2019, vol. 100, 195434 p.

15. Pshenichnyuk I.A., Kosolobov S.S., Drachev V.P. Towards Deep Integration of Electronics and Photonics. *Applied Sciences*, 2019, vol. 9, 4834 p.

16. Pshenichnyuk I.A., Kosolobov S.S., Maimistov A.I., Drachev V.P. Conversion of light polarisation in asymmetric plasmonic waveguides. *Quantum Electronics*, 2018, vol. 48, 1153.

17. Hohimer J.P., Craft D.C., Hadley G.R., Vawter G.A., Warren M.E. Singlefrequency continuous-wave operation of ring resonator diode lasers. *Applied physics letters*, 1991, vol. 59, 3360.

18. Han H., Favaro M.E., Forbes D.V., Coleman J.J. In/sub x/Ga/sub 1-x/As-Al/sub y/Ga/sub 1-y/As-GaAs strained-layer quantum-well heterostructure circular ring lasers. *IEEE photonics technology letters*, 1992, vol. 4, 817.

19. Li G., Krishnamoorthy A.V., Shubin I., Yao J., Luo Y., Thacker H., Cunningham J.E. Ring Resonator Modulators in Silicon for Interchip Photonic Links. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 2013, vol. 19, 95.

20. Manipatruni S., Preston K., Chen L., Lipson M. Ultra-low voltage, ultra-small mode volume silicon microring modulator. *Optics express*, 2010, vol. 18, 18235.

21. Dong P., Shafiiha R., Liao S., Liang H., Feng N.N., Feng D., Asghari M. Wavelength-tunable silicon microring modulator. *Optics express*, 2010, vol. 18, 10941.

22. Xia F., Rooks M., Sekaric L., Vlasov Y. Ultra-compact high order ring resonator filters using submicron silicon photonic wires for on-chip optical interconnects. *Optics express*, 2007, vol. 15, 11934 p.

23. Little B.E., Chu S.T., Absil P.P., Hryniewicz J.V., Johnson F.G., Seiferth F., Trakalo M. Very high-order microring resonator filters for WDM applications. *IEEE Photonics Technology Letters*, 2004, vol. 16, 2263 p.

24. Kartner F.X., Amatya R., Araghchini M., Birge J., Byun H., Chen J., Hoyt J.L. Photonic analog-to-digital conversion with electronic-photonic integratedcircuits. *Silicon Photonics III. International Society for Optics and Photonics*, 2008.

25. Morichetti F., Melloni A., Breda A., Canciamilla A., Ferrari C., Martinelli M. A reconfigurable architecture for continuously variable optical slow-wave delay lines. *Optics Express*, 2007, vol. 15, 17273 p.

26. Wang X., Zhou L., Li R., Xie J., Lu L., Wu K., Chen J. Continuously tunableultra-thin silicon waveguide optical delay line. *Optica*, 2017, vol. 4, 507 p.

27. Bagherian H., Skirlo S., Shen Y., Meng H., Ceperic V., Soljacic M. On-chip optical convolutional neural networks. *arXiv preprint arXiv:1808.03303*, 2018.

28. Agarwal A., Toliver P., Menendez R., Etemad S., Jackel J., Young J., Chen W. Fully programmable ring-resonator-based integrated photonic circuit for phase coherent applications. *Journal of lightwave technology*, 2006, vol. 24, 77 p.

29. Meany T., Ngah L.A., Collins M.J., Clark A.S., Williams R.J., Eggleton B.J., Tanzilli S. Hybrid photonic circuit for multiplexed heralded single photons. *Laser and Photonics Reviews*, 2014, vol. 8, L42 p.

30. Xia Z., Eftekhar A.A., Soltani M., Momeni B., Li Q., Chamanzar M., Adibi A. High resolution on-chip spectroscopy based on miniaturized microdonut resonators. *Optics express*, 2011, vol. 19, 12356 p.

31. Meijerink A., Roeloffzen C.G., Meijerink R., Zhuang L., Marpaung D.A., Bentum M.J., van Etten W. Novel ring resonator-based integrated photonic beamformerfor broadband phased array receive antennas - Part I: Design and performanceanalysis. *Journal of Lightwave Technology*, 2009, vol. 28, 3 p.

32. Minzioni P., Lacava C., Tanabe T., Dong J., Hu X., Csaba G., Schroder J. Roadmap on all-optical processing. *Journal of Optics*, 2019, vol. 21, 063001 p.

33. Marcuse D. The Coupling of Degenerate Modes in Two Parallel DielectricWaveguides. *Bell. Syst. Tech. J.*, 1971, vol. 50, no. 6, pp. 1791-1816.

34. Litchinitser N.M., Gabitov I.R., Maimistov A.I., Shalaev V.M. Linear and nonlinear metamaterials and transformation optics. *Tutorials in Metamaterials*. Eds. M.A. Noginov, V.A. Podolskiy. RC Press, Taylor & Francis Group, BocaRaton, London, New York, 2012.

35. Yariv A. Coupled Mode Theory for Guided Wave Optics. *IEEE J. Quant. Elecrton.*, 1973, QE-9, no. 9, pp. 919-933.

36. Tien P.K. Integrated Optics and New Wave Phenomena in Optical Waveguides. *Rev. Mod. Phys.*, 1977, vol. 49, no. 2, pp. 361-420.

37. Yeh C., Manshadi F., Casey K.F., Johnston A. Accuracy of directional coupler theory in fiber or integrated optics applications. *J. Opt. Soc. Amer.*, 1978, vol. 68, no. 8, pp. 1079-1083.

38. Tsukada N., Tsujinishi Ryoko, Tomishima Kazunary High-effeciency coupling between phase-mismatched optical waveguides. *J. Appl. Phys.*, 1979, vol. 50, no. 7, pp. 4611-4615.

39. Hous H.A., Huang W.P., Kawakami S., Whitaker N.A. Coupled Mode Theoryof Optical Waveguides. *J. Lightwave Technol.*, 1987, LT-5, no. 1, pp. 16-23.

40. Semenov A.S., Smirnov V.L., Shmal'ko A.V. Elementy volnovodnogo trakta opticheskikh integral'nykh skhem na osnove trekhmernykh opticheskikh volnovodov [Elements of a waveguide path of optical integrated circuits based on three-dimensional optical waveguides]. *Kvantovaia elektronika*, 1988, vol. 15, no. 7, pp. 1327-1357.

41. Crosignani B., Porto P.Di, Yariv A. Coupled-Mode Theory and Slowly- Varying Approximation in Guided-Wave Optics. *Opt. Commun.*, 1990, vol. 78, no. 3, 4, pp. 237-239.

42. Wei-Ping Huang Coupled-mode theory for optical waveguides: an overview. *J. Opt. Soc. Amer*, 1994, vol. A. 11, iss. 3, pp. 963-983.

43. Chak Ph., Iyer Rajiv, Aitchison J.S., Sipe J.E. Hamiltonian formulationofcoupled-mode theory in waveguiding structures. *Phys. Rev*, 2007, E. 75, 016608 (14 pages).

44. Iariv A., Iukh P. Opticheskie volny v kristallakh [Optical waves in crystals]. Moscow: Mir, 1987.

45. Khansperdzher R. Integral'naia optika. Teoriia i tekhnologiia [Integral optics. Theory and technology]. Moscow: Mir, 1985.

46. Findakly T., Chen C.-L. Optical directional couplers with variable spacing. *Appl. Opt.*, 1978, vol. 17, no. 5, pp. 769-773.

47. Somekh S. Opticheskie napravlennye otvetviteli [Optical directional couplers]. *Vvedenie v integral'nuiu optiku.* Ed. M. Barnoski. Moscow: Mir, 1977, pp. 194-226.

48. Kuznetsov M. Expressions for the coupling coefficient of a rectangularwaveguide directional coupler. *Opt. Lett*, 1983, vol. 8(9), pp. 499-501.

49. Zhang Lin, Song Muping, Wu Teng, Zou Lianggang, Beausoleil R.G., Willner A.E. Embedded ring resonators for microphotonic applications. *Optics Letters*, 2008, vol. 33, no. 17, pp. 1978-1980.

50. Little B.E., Chu S.T., Haus H.A., Foresi J., Laine J.-P. Microring ResonatorChannel Dropping Filters. *J. Lightwave Technol.*, 1997, LT-15, no. 6, pp. 998-10055.

51. Shen I.R. Principy nelinejnoj optiki [Principles of nonlinear optics]. Moscow: Nauka, 1989.

52. Jensen S.M. The Nonlinear Coherent Coupler. *IEEE J.Quant. Electron*, 1982, QE-18, no. 10. pp. 1580-1583.

53. Ankiewicz A. Interaction Coefficient in Detuned Nonlinear Couplers. *Opt. Commun*., 1988. vol. 66, no. 5, 6, pp. 311-314.

54. Assanto G. All-optical integrated nonlinear devices. *J. Mod. Opt.*, 1990, vol. 37, no. 5, pp. 855-873.

55. Majmistov A.I. O rasprostranenii svetovogo impul'sa v nelinejnyhtunnel'no svjazannyh opticheskih volnovodah [Propagation of a

light pulse in nonlinear tunnel-coupled optical waveguides]. *Kvantovaja jelektronika*, 1991, vol. 18, no. 6, pp. 758-761.

56. Yuan L.-P. A Unified Approach for the Coupled-Mode Analysis of Nonlinear Planar Optical Couplers. *IEEE J. Quant. Electr. QE-30*, 1994, no. 1, pp. 126-133.

57. Litchinitser N.M., Gabitov I.R., Maimistov A.I. Optical Bistability in aNonlinear Optical Coupler with a Negative Index Channel. *Phys. Rev*., 2007, Lett. 99, 113902 p.

58. Majmistov A.I., Gabitov I.R., Lichinicer N.M. Uedinennye volny vnelinejnom antinapravlennom otvetvitele [Solitary waves in an off-line anti-directional coupler]. *Optika i spektroskopija*, 2008, vol. 104, no. 2, pp. 292-297.

59. Ryzhov M.S., Majmistov A.I. Formirovanie shhelevogo solitona v antinapravlennom nelinejnom otvetvitele [Formation of a slot soliton in an antidirectional nonlinear coupler]. *Kvantovaja jelektronika*, 2012, vol. 42, no. 11, pp. 1034-1038.

60. Xiang Yuanjiang, Wen Shuangchun, Dai Xiaoyu, Fan Dianyuan. Modulation instability in nonlinear oppositely directed coupler with a negative-index metamaterial channel. *Phys. Rev*., 2010, E. 82, 056605 p.

61. Shafeeque Ali A.K., Nithyanandan K., Porsezian K., Maimistov A.I. Modulation instability in a triangular three-core coupler with a negative-index material channel. *Journal of Optics*, 2016, vol. 18, 035102 p.

62. Shafeeque Ali A.K., Nithyanandan K., Porsezian K., Maimistov A.I. Influenc of birefringence in the instability spectra of oppositely directed coupler with negative index material channel. *Phys. Rev*., 2016, A. 93, 023848 p.

63. Maimistov A.I., Kazantseva E.V. Oppositely Directional Coupler: Example of the Forward Backward Waves Interaction in the Metamaterials. *Contemporary Optoelectronics: From (Meta)Materials to Device Applications*. Ed. by Oleksiy Shulika and Igor Sukhoivnov. Springer Series in Optical Sciences. Springer-Verlag, 2016, vol. 199, pp. 181-195.

64. Filter synthesis forperiodically coupled microring resonators / B.E. Little, Sai T. Chu, J.V. Hryniewicz, Ph. P. Absil // Opt. Lett. – 2000. – Vol. 25, No. 5. – P. 344–346.

65. Little B.E., Sai T. Chu, Hryniewicz J.V., Absil Ph.P. Synthesis of a parallelcoupled ring-resonator filter. *Opt. Lett.*, 2001, vol. 26, no. 12, pp. 917-346.

66. Melloni A. Synthesis of a parallel-coupled ring-resonator filter. *Optics Letters*, 2001, vol. 26, no. 12, pp. 917-920.

67. Li Kebin, Krishnamoorthy Uma, Heritage J.P., Solgaard O. Coherent micromirror arrays. *Optics Letters*, 2002, vol. 27, no. 5, pp. 366-368.

68. Li Huanan, Kottos Tsampikos, Shapiro B. Driving-induced metamorphosis oftransport in arrays of coupled resonators. *Phys. Rev*., 2018, A 97, 023846 p.

69. Gorlach M.A., Poddubny A.N. Interaction-induced two-photon edge states inan extended Hubbard model realized in a cavity array. *Phys. Rev*., 2017, A. 95, 033831 p.

70. Xu Xun-Wei, Chen Ai-Xi, Li Yong, Liu Yu-xi. Single-photon nonreciprocaltransport in one-dimensional coupled-resonator waveguides. *Phys. Rev*., 2017, A. 95, 063808 p.

71. Shvartsburg A.B. Videoimpul'sy i neperiodicheskie volny v dispergiruiushchikh sredakh (tochno reshaemye modeli) [Video pulses and non-periodic waves in dispersive media (exactly solvable models)]. *UFN*, 1998, vol. 168, no. 1, pp. 85-103.

72. Rozanov N.N. Elektricheskaia ploshchad' predel'no korotkikh impul'sov imoment sily [Electric area of extremely short impulses and moment of force]. *Optika i spektroskopiia*, 2018, 125, no. 6, pp. 818-819.

73. Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Babushkin I., Pakhomov A.V., Rozanov N.N. Rasprostranenie impul'sa sveta c dlitel'nost'iu menee odnogo perioda v usilivaiushchei rezonansnoi srede [Propagation of a light pulse with a duration of less than one period in an amplifying resonant medium]. *Kvantovaia elektronika*, 2018, vol. 48, no. 6, pp. 532-536.

74. Rozanov N.N., Arkhipov R.M., Arkhipov M.V. O zakonakh sokhraneniia v elektrodinamike sploshnykh sred (k 100-letetiiu Gosudarstvennogo opticheskogo instituta imeni S.I. Vavilova) [Conservation laws in the electrodynamics of continuous media (to the 100th anniversary of the S.I. Vavilov State Optical Institute)]. *UFN*, 2018, vol. 188, no. 12, pp. 1347-1353.

75. Rozanov N.N. Ob uskorenii reliativistskoi chastitsy impul'som izlucheniia [Acceleration of a relativistic particle by a radiation pulse]. *Optika i spektroskopiia*, 2019, vol. 126, no. 2, pp. 211-213.

76. Rozanov N.N. Transportirovka predel'no korotkikh impul'sov izlucheniia v volnovodakh s neodnosviaznym poperechnym secheniem [Transportation of extremely short radiation pulses in waveguides with a non-simply connected cross section]. *Optika i spektroskopiia*, 2019, vol. 127, no.6, pp. 960-962.

77. Birmontas A., Vasiliauskas V., Piskarskas A., Stabinis A. Dispersionnoe rasplyvanie femtosekundnykh svetovykh impul'sov v

kristallakh, vozdukhe i vode [Dispersive spreading of femtosecond light pulses in crystals, air, and water]. *Kvantovaia elektronika*, 1985, vol. 12, no. 6, pp. 1191-1195.

78. Anderson D.G., Askne J.I.H. Wave packets in strongly dispersive media. *Proc. IEEE*, 1974, vol. 62, pp. 1518–1523.

79. Miyagi M., Nishida Sh. Pulse spreading in a single-mode fiber due to thirdorder dispersion. *Appl. Opt*., 1979, vol. 18, no. 5, pp. 678-682.

80. Oughstun K.E. The Group Velocity Approximation. *Electromagneticand Optical Pulse Propagation. Springer Series in Optical Sciences*, vol 225. Springer, Cham, 2019.

ПРИЛОЖЕНИЕ

А. Некоторые сведения из теории матриц

А.1. Следствие теоремы Кэли–Гамильтона

Характерестическое уравнение матрицы A размером *n*x*n* – это следующее уравнение:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Корни характерестического уравнения λ_1, λ_2, …, λ_n есть собственные значения матрицы A. Справедлива теорема Кэли–Гамильтона:

Теорема П.1 Каждая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению.

Следствием этой теоремы является возможность предстваить *m*-ю степень матрицы в виде:

$$A^m = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r^m \frac{\Pi_{s \neq r}(A - \lambda_s I)}{\Pi_{s \neq r}(\lambda_r - \lambda_s)}. \qquad (76)$$

А.2. Степени матриц 2 × 2

Если применять формулу (76) к матрицам, имеющим порядок 2 (или 2 × 2 – матрицам), то соотвутствующее выражение примет вид:

$$A^m = \lambda_1^m \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} + \lambda_2^m \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

откуда можно получить:

$$A^m = \frac{\lambda_1^m - \lambda_2^m}{\lambda_1 - \lambda_2} A - \lambda_1\lambda_2 \frac{\lambda_1^{m-1} - \lambda_2^{m-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} I.$$

Стоит заметить, что $\lambda_1\lambda_2 = \det A$. Таким образом, можно сделать заключение, что

$$A^m = P_{m-1}A - P_{m-2}(\det A)I, \tag{77}$$

где P_{m-1} и P_{m-2} – полиномы степени $(m - 1)$ и $(m - 2)$. Хотя они определены явно формулами:

$$P_{m-1}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1^m - \lambda_2^m}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad P_{m-2}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1^{m-1} - \lambda_2^{m-1}}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

имеется способ определить их прямо через матричные элементы матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Важное предположение: $\det A = 1$. В этом случае матрицу А можно записать как линейную комбинаци матриц Паули $\hat{\sigma}_j$ и единичной матрицы:

$$A = a_0 I + a_j\hat{\sigma}_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & a - a_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь $2a = a_{11} + a_{22} = TrA$. Вычисление квадрата матрицы А дает:

$$A^2 = a^2 I + 2aA + a_i a_j \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j.$$

Надо воспользоваться известным тождеством:

$$\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j = i \in_{ij} \hat{\sigma}_k + \delta_{ij}.$$

Свертка симметричного тензора $a_i a_j$ с антисимметричным тензором $\in_{ij}$ дает нуль. Следовательно,

$$A^2 = a^2 I + 2aA + a_i a_j I.$$

Вычисление определителя матрицы A дает $\det A = a^2 - a_i a_j$, но detA = 1 по предположению. Следовательно,

$$A^2 = a^2 I + 2aA + (a^2 - 1)I = 2aA - I. \qquad (78)$$

Умножить надо на A левую и правую часть уравнения (77), учитывая, что detA = 1:

$$A^{m+1} = P_{m-1}A^2 - P_{m-2}A.$$

Используя (78), можно избавиться от квадрата матрицы A в левой части полученного выражения, а правую часть преобразовать согласно (77). Это даст:

$$P_m A - P_{m-1} I = (2aP_{m-1} - P_{m-2})A - P_{m-1} I,$$
$$P_m A = (2aP_{m-1} - P_{m-2})A.$$

Следовательно, коэффициенты P_m удовлетворяют рекуррентному соотношению:

$$P_m = 2aP_{m-1} - P_{m-2}, \qquad (79)$$

Отсюда следует, что коэффициенты P_m – полиномы P_m (λ_1, λ_2), являются полиномами $X = a_{11} + a_{22} = TrA$. Но TrA является инвариантом, не меняющимся при ортогональных (и даже унитарных) преобразованиях:

$$TrA = Tr(UAU^t) = Tr(AU^tU).$$

Можно взять унитарное преобразование, диагонализующее матрицу A, так что $TrA = \lambda_1 + \lambda_2$. Таким образом, полиномы $P_m(\lambda_1, \lambda_2)$ являются полиномами одной переменной $\lambda_1 + \lambda_2$.

Рекурреинтное соотношение (79) позволяет найти все P_m, начиная с двух самых первых, которые явно определяются из (78): $P_0 = 1$, $P_1 = X$. Первые несколько полиномов приведены в таблице.

Таблица полиномов

Четные степени	Нечетные степени
$P_0 = 1$	$P_1 = X$
$P_2 = X^1 - 1$	$P_3 = X^3 - 2X$
$P_4 = X^4 - 3X^2 + 1$	$P_5 = X^5 - 4X^3 + 3X$
$P_6 = X^6 - 5X^4 + 6X^2 + 1$	$P_7 = X^7 - 6X^5 + 10X^3 - 4X$
$P_8 = X^8 - 7X^6 + 15X^4 - 10X^2 + 1$	$P_9 = X^9 - 8X^7 + 21X^5 - 20X^3 + 8X$

Полиномы P_m называются полиномами Чебышева второго типа.

Если определить матричные элементы m-й степени матрицы А как

$$A^m = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix},$$

то для них можно записать следующие выражения:

$$L_{11} = a_{11}P_{m-1}(X) - P_{m-2},$$

$$L_{12} = a_{12}P_{m-1}(X),$$

$$L_{21} = a_{21}P_{m-1}(X),$$

$$L_{22} = a_{22}P_{m-1}(X) - P_{m-2},$$

где $X = a_{11} + a_{22}$.

B. Вычисление интегралов

B.1. Гауссов интеграл

Известный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{80}$$

часто используется для вычисления гауссового интеграла более общего вида

$$G_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_2\xi^2 + a_1\xi} d\xi. \tag{81}$$

Надо дополнить показатель до полного квадрата, сделать нужно замену переменных и прийти к (80):

$$a_2\xi^2 - a_1\xi = a_2\left[\xi^2 - 2\frac{a_1\xi}{2a_2} + \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2\right] =$$

$$= a_2\left(\xi - \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - a_2\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2.$$

Следовательно,

$$G_2 = \exp\left(\frac{a_1^2}{4a_2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-a_2\left(\xi-\frac{a_1}{2a_2}\right)^2\right]d\xi = \exp\left(\frac{a_1^2}{4a_2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a_2\xi^2}d\xi\,.$$

Таким образом, с учётом (80) получено:

$$G_2 = \sqrt{\frac{\pi}{a_2}}\exp\left(\frac{a_1^2}{4a_2}\right). \qquad (82)$$

Здесь надо полагать, что a_2 есть положительное вещественное число, тогда как a_1 может быть комплексным числом, в частности, мнимым. Тогда:

$$G_2 = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-a_2\xi^2+a_1\xi}d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{a_2}}\exp\left(-\frac{a_1^2}{4a_2}\right). \qquad (83)$$

B.2. Интегралы Эйри

Необходимо вычислить интеграл (свести его к известным функциям):

$$G_3 = \int_{-\infty}^{\infty}e^{ia_1\xi-ia_2\xi^2+ia_3\xi^3}d\xi. \qquad (84)$$

Делается замена переменных $\xi = y + y_0$. Полином в показателе экспоненты преобразуется следующем образом:

$$ia_1\xi-ia_2\xi^2+ia_3\xi^3 = ia_1(y+y_0)-ia_2(y+y_0)^2+ia_3(y+y_0)^3 =$$

$$=(ia_1y_0-ia_2y_0^2+ia_3y_0^3)+(ia_1-2ia_2y_0+3ia_3y_0^2)y+$$

$$+(-a_2+3ia_3y_0)y^2+ia_3y^3.$$

Надо выбрать его таким, чтобы коэффициент перед y^2 исчез. Следовательно, надо положить $y_0 = \frac{a_2}{3ia_3}$. Тогда оставшиеся коэфициенты выражаются следующими формулами:

$$b_0 = (ia_1y_0-ia_2y_0^2+ia_3y_0^3) = iy_0(ia_1-ia_2y_0+ia_3y_0^2) = \frac{a_2}{3a_3}\left(a_1+\frac{2}{9}\frac{a_2^2}{a_3}\right),$$

$$ib_1 = (ia_1 - 2ia_2 y_0 + 3ia_3 y_0^2) = i\left(a_1 + \frac{2a_2^2}{3a_3} - \frac{a_2^2}{3a_3}\right) = i\left(a_1 + \frac{a_2^2}{3a_3}\right).$$

В таком случае

$$G_3 = e^{b_0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ib_1 y + ia_3 y^3} dy.$$

Можно использовать ряд тождеств:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{if(y)} dy = \int_{-\infty}^{0} e^{if(y)} dy + \int_{0}^{\infty} e^{if(y)} dy =$$
$$= \int_{0}^{\infty} (e^{if(y)} + e^{if(-y)}) dy = 2\int_{0}^{\infty} \cos f(y) dy.$$

Поскольку $f(-y) = -f(y)$. Следовательно,

$$G_3 = 2e^{b_0}\int_{0}^{\infty} \cos(ib_1 y + ia_3 y^3) dy.$$

Следующая замена переменной $t = (3a_3)^{\frac{1}{3}} y$ приводит к интегралу:

$$G_3 = 2e^{b_0}(3a_3)^{\frac{1}{3}}\int_{0}^{\infty} \cos\left(ut + \frac{t^3}{3}\right) dt, \quad u = (3a_3)^{-\frac{1}{3}} b_1.$$

Интеграл

$$\int_{0}^{\infty} \cos\left(ut + \frac{t^3}{3}\right) dt = \pi Ai(u)$$

известен как интеграл Эйри первого типа. Таким образом,

$$G_3 = 2\pi e^{b_0}(3a_3)^{-\frac{1}{3}} Ai(u).$$

Получено 1 июня 2020